

Chapitre 5

Troncature Spatiale

*Olim lacus colueram,
olim pulcher extiteram,
dum cignus ego fueram.*

*Miser, miser!
modo niger
et ustus fortiter!*

*(Jadis j'habitais le lac,
jadis j'avais belle allure
quand j'étais cygne.*

*Hélas, Hélas!
maintenant noir
et solidement rôti je me fais!)*

Carmina Burana - Chants profanes de Carl Orff

Sommaire

5.1	Analyse du phénomène	217
5.1.1	Troncature de la distribution de sources secondaires	217
5.1.2	Lien avec l'intégrale de Rayleigh	219
5.1.3	Deux interprétations du phénomène de troncature	221
	Troncature spatiale	222
	Diffraction	227
5.1.4	Modélisation de l'erreur de troncature par l'intégrale de Rubinowicz	230
	Intégrale de diffraction de Rubinowicz	230
	Application au calcul de l'erreur de troncature	236
	Source de Rubinowicz	237
	Contour de la fenêtre de diffraction virtuelle	242
5.1.5	Influence de la troncature sur le champ restitué	242
5.2	Quantification de l'effet de troncature	247
5.2.1	Critère d'erreur de troncature	247
5.2.2	Cas d'un réseau rectiligne de sources secondaires: Notions de troncature verticale et de troncature horizontale	247
5.2.3	Troncature verticale vs Troncature horizontale: Quantification de leurs effets	250
5.2.4	Conclusion	254
5.3	Solutions pour réduire l'effet de troncature	254
5.3.1	Annulation de l'onde diffractée par des sources de Rubinowicz	254
	Principe	254
	Implémentation d'une source de Rubinowicz	259
	Positionnement des sources de Rubinowicz	264
	Concept de source de Rubinowicz virtuelle	266
	Méthodes alternatives aux sources de Rubinowicz	267
5.3.2	Annulation de l'onde diffractée par des sources de Fresnel	267
	Calcul du signal d'erreur de troncature à partir d'un problème de Rayleigh	267
	Approximation de Fresnel	270
	Sources de Fresnel	271
5.3.3	Approximation de la Phase Stationnaire (troncature verticale)	272
	Lien entre l'approximation de la Phase Stationnaire et la troncature du réseau de sources secondaires	272
	Lien entre l'approximation de la Phase Stationnaire et les sources de Rubinowicz	273
	Mise en œuvre d'une correction moyenne	276
5.3.4	Fenêtre de pondération spatiale (troncature horizontale)	277
5.4	Conclusion	280
	Références Bibliographiques	283

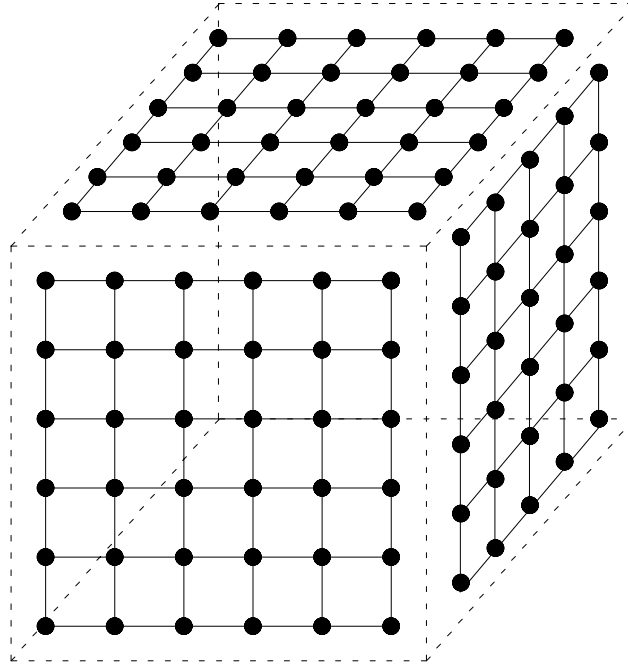


FIG. 5.1 - Reproduction d'un champ sonore par des sources secondaires distribuées sur une surface fermée (cas d'un cube)

5.1 Analyse du phénomène

5.1.1 Troncature de la distribution de sources secondaires

Dans l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz, le champ acoustique est reproduit par une distribution de sources secondaires réparties sur une surface fermée qui limite l'espace de restitution (cf. 3.2). Comme il s'agit d'une surface fermée, le nombre de sources secondaires est fini, mais il croît avec l'étendue de la zone de restitution et, pour une zone d'écoute de taille raisonnable, il atteint rapidement des valeurs prohibitives, compte tenu de la contrainte sur l'espacement minimal des sources imposé par l'aliasing spatial. Pour reproduire des fréquences élevées, l'espacement entre les sources doit en effet être très faible, ce qui accroît la densité des sources secondaires sur la surface. Par exemple, si l'espace de restitution est représenté par un cube de 2 mètres de côté, près de 900 sources secondaires sont nécessaires pour couvrir la surface du cube et garantir la reconstruction du champ sonore pour une fréquence maximale $f_{max} = 1$ kHz (cf. Fig. 5.1). Comme chaque source secondaire est composée d'un monopôle et d'un dipôle, le dispositif requerrait en réalité le double de transducteurs, à la prise et à la restitution du son. De plus, à chaque doublement de la fréquence maximale, le nombre de sources est quadruplé.

Pour réduire le nombre total de sources, on est donc contraint de tronquer la distribution de sources secondaires. Cependant cette troncature ne doit pas être effectuée de façon arbitraire. Il est en effet judicieux de prendre en compte les éventuelles relations entre les différentes sources, concernant notamment la redondance entre les sources secondaires, ainsi que leur poids relatif dans le travail de reconstruction, à partir des résultats de l'étude menée au chapitre 3 (cf. section 3.4.2).

Pour illustrer cette démarche, considérons un espace de restitution représenté par un cube dont les surfaces sont identifiées par un numéro (cf. Fig. 5.2). On suppose que la source primaire appartient exclusivement au demi-espace limité par la face 1 du cube (cf. Fig. 5.2). Cette hypothèse est parfaitement justifiée dans le contexte de la visioconférence, étant donné que les sources sonores, c'est-à-dire les personnes présentes dans la salle distante, sont censées être situées derrière l'écran vidéo (cf. Chapitre 1). A partir des conclusions de l'étude menée au paragraphe 3.4.2, il est facile de prévoir les contributions relatives des différentes faces du

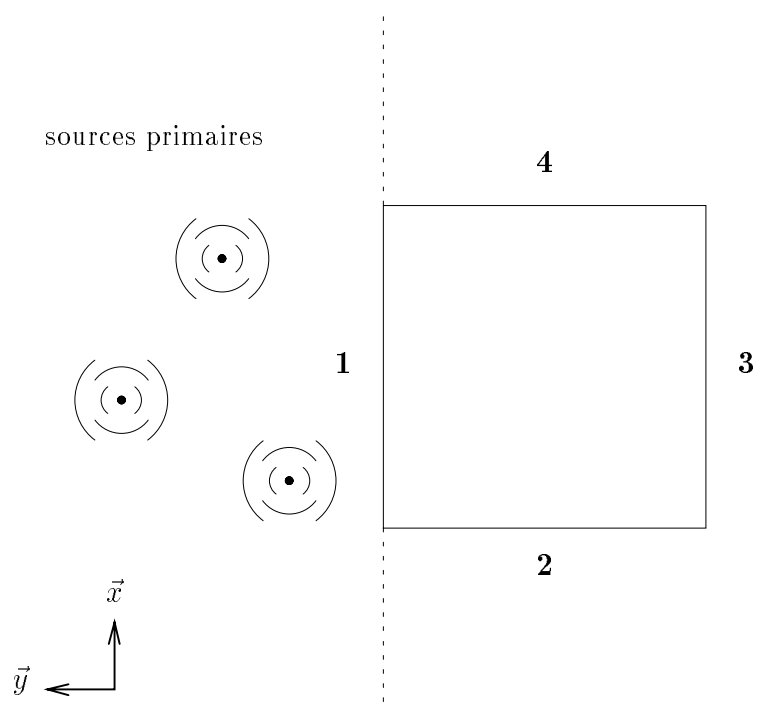
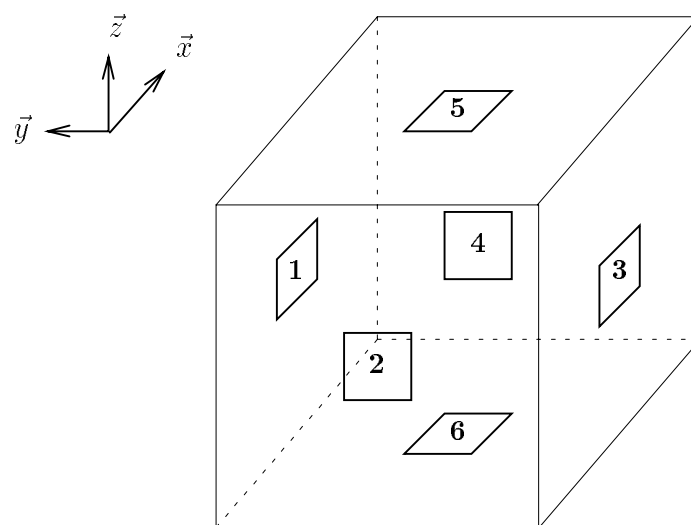


FIG. 5.2 - Numérotation des faces du cube

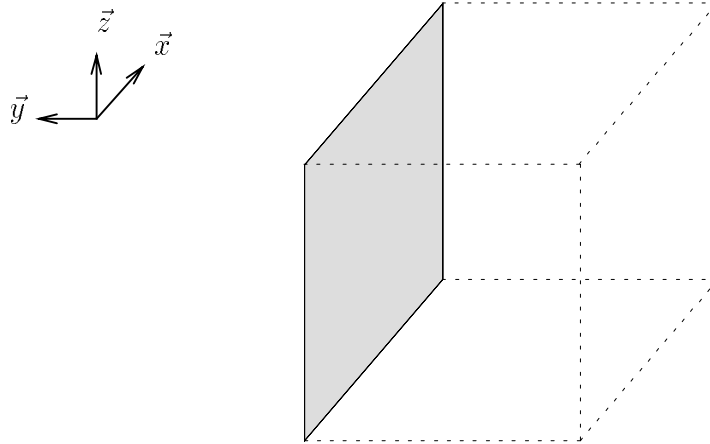


FIG. 5.3 - Troncature de la distribution de sources secondaires de Kirchhoff (seule la face 1 du cube est conservée)

cube dans cette configuration:

- la face 1 apporte la contribution *prépondérante*,
- la contribution de la face 3 est *nulle*,
- les faces 2, 4, 5 et 6 ne contribuent pas directement au travail de reconstruction du champ sonore: leurs rôles se bornent uniquement à *annuler l'onde diffractée* générée par les arêtes qui limitent la face 1.

Par suite, des 6 faces du cube, seule la face 1 peut être conservée en première approximation (cf. Fig. 5.3). De plus, si l'on compare les contributions respectives des monopôles et des dipôles de cette face, on constate que les deux types de sources contribuent de façon équivalente: les ondes émises sont égales, de telle sorte qu'un seul type de sources (monopôle ou dipôle) suffit. Dans ces conditions, il est possible de substituer à l'ensemble des sources secondaires réparties sur les 6 faces du cube un réseau planaire constitué exclusivement de sources monopolaires ou dipolaires.

Le nombre total de sources secondaires se trouve ainsi divisé par un facteur 12: si l'on reprend l'exemple précédent, la distribution de sources secondaires formant cette fois un carré de 2 mètres de côté, la reconstruction d'un champ acoustique pour une fréquence maximale de $f_{max} = 1$ kHz ne requiert plus que 150 monopôles au lieu de 900 monopôles et 900 dipôles, ce qui représente un gain très appréciable.

Il faut noter que cette simplification n'est possible que sous l'hypothèse où les sources primaires restent confinées à l'intérieur d'un demi-espace (le demi-espace en regard de la face 1). Si les sources primaires peuvent occuper tout l'espace autour de l'auditeur, les faces 1 à 4 sont nécessaires. Si, en outre, elles peuvent être situées au dessus ou au dessous de lui, les faces 5 et 6 sont aussi requises. En d'autres termes, la troncature de la distribution de sources secondaires est subordonnée à la position des sources primaires, plus précisément à l'étendue de l'espace où elles sont susceptibles d'évoluer. Plus cet espace est important, plus les possibilités de troncature sont limitées.

5.1.2 Lien avec l'intégrale de Rayleigh

Après simplification, la distribution de sources secondaires de Kirchhoff se réduit à un carré vertical: ce résultat peut être relié à l'intégrale de Rayleigh. En effet, compte tenu des contraintes sur la position des sources primaires, les intégrales de Kirchhoff et Rayleigh proposent deux solutions alternatives pour reproduire le champ acoustique primaire. Puisque l'espace des sources primaires se limite au demi-espace infini indiqué sur la figure 5.2, il est possible d'appliquer à notre problème une des intégrales de Rayleigh au lieu de l'intégrale de Kirchhoff. En ce cas, l'onde sonore émise par les sources primaires est reproduite par un *plan vertical de monopôles* (Intégrale de Rayleigh I) ou *de dipôles* (Intégrale de Rayleigh II). Ce plan est

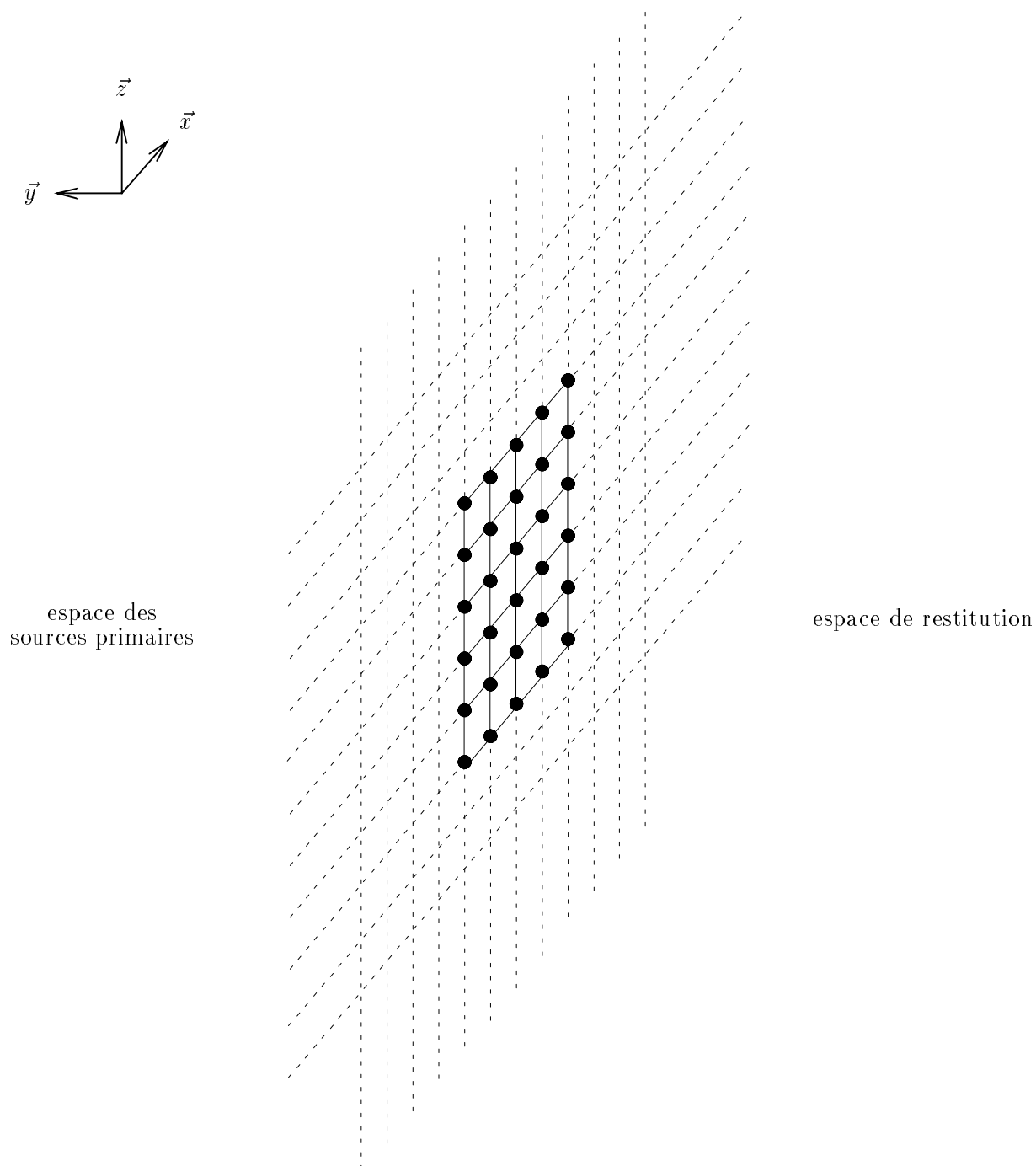


FIG. 5.4 - Reproduction d'un champ sonore par un plan infini de sources secondaires (Intégrales de Rayleigh)

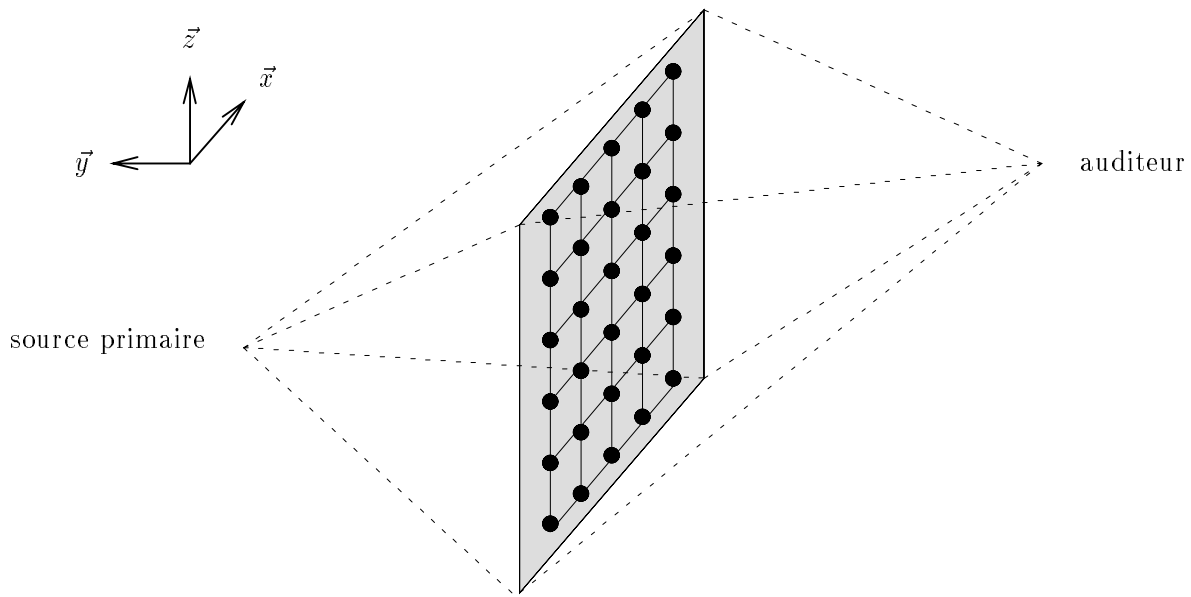


FIG. 5.5 - Reproduction par un plan fini de sources secondaires (approche de Rayleigh avec troncature)

défini par la face 1 du cube considéré précédemment (cf. Fig. 5.2 & 5.4). Il faut noter que la reconstruction du champ acoustique ne sera exacte qu'à condition de disposer d'un *plan infini de sources*. Pour des raisons pratiques évidentes, on est contraint de *tronquer* ce plan infini afin de se ramener à un réseau fini. Par suite, le problème de troncature est *inhérent* à l'approche de Rayleigh dans la mesure où elle suppose une distribution infinie de sources, contrairement à l'approche de Kirchhoff qui considère d'emblée une distribution finie et où la troncature intervient dans le seul but de diminuer le nombre de sources secondaires.

Une fois tronqué, le réseau de sources secondaires de Rayleigh se réduit donc à un carré vertical identique à celui obtenu dans l'approche de Kirchhoff (cf. Fig. 5.3 & 5.5). La position de ce carré dans le plan vertical doit être choisie de façon à minimiser les trajets entre la source primaire, les sources secondaires et l'auditeur (cf. Théorème de la Phase Stationnaire).

A l'origine, les approches de Kirchhoff et de Rayleigh se distinguent par la géométrie de la distribution de sources secondaires et le type de transducteurs utilisés:

- pour Kirchhoff: les sources secondaires sont réparties sur une surface fermée et chacune se compose d'un monopôle et d'un dipôle,
- pour Rayleigh: elles se répartissent sur un plan vertical infini et sont constituées d'un seul type de transducteur (monopôle ou dipôle).

Néanmoins, lorsque l'on cherche à réduire le réseau de sources secondaires en ne retenant que les sources prépondérantes du point de vue du travail de reconstruction, les approches de Kirchhoff et de Rayleigh convergent vers la même solution, à savoir un réseau planaire de sources monopolaires ou dipolaires.

5.1.3 Deux interprétations du phénomène de troncature

Etant donnée l'équivalence entre les problèmes de Kirchhoff et Rayleigh, on va désormais considérer une géométrie de Rayleigh, à la fois dans un souci de clarté de l'exposé et parce que ce choix fait mieux ressortir les différentes interprétations du phénomène de troncature. Dans ces conditions, le champ sonore est reproduit par un plan vertical de sources qui théoriquement est infini, mais qui est en pratique tronqué à un carré.

Le théorème de la phase stationnaire (cf. Annexe D) nous autorise à penser que la contribution des sources secondaires situées à l'infini sur le pourtour du plan vertical est mineure dans le travail de reconstruction du

champ sonore. Néanmoins l'absence de ces sources du fait de la troncature du réseau introduit une *erreur de reconstruction*. Le phénomène peut être interprété d'un double point de vue:

- d'abord du point de vue mathématique, il peut être analysé en terme de *traitement du signal* comme la **troncature du support d'un signal**,
- mais aussi d'un point de vue *physique*, on va montrer qu'il s'identifie à un phénomène de **diffraction**.

Troncature spatiale

A partir de l'équation générale décrivant le processus de reconstruction sous la forme d'un produit de convolution (cf. section 3.2):

$$p(\vec{r}) = [p_0 * g](\vec{r}) ,$$

la troncature du réseau de sources secondaires se traduit par l'application à la pression p_0 d'une fenêtre de troncature spatiale w , telle que:

$$p_w(\vec{r}) = [(p_0 \times w) * g](\vec{r}) \quad (5.1)$$

où la fonction p_w désigne la pression restituée par le réseau tronqué. Dans le domaine dual des fréquences spatiales, le produit simple devient un produit de convolution:

$$p_w(\vec{\chi}) = [(p_0 * w) \times g](\vec{\chi}) \quad (5.2)$$

Le spectre de la pression primaire p_0 est ainsi convolué par la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fenêtre de troncature.

Si la fenêtre est un carré de côté L défini par:

$$w(x, z) = \text{Rect}_L(x) \times \text{Rect}_L(z) \quad (5.3)$$

son spectre calculé dans le domaine des fréquences spatiales $\vec{\chi} = (\chi_x, \chi_z)$ s'exprime:

$$w(\chi_x, \chi_z) = L^2 \text{sinc}(L\chi_x) \times \text{sinc}(L\chi_z) \quad (5.4)$$

Les effets de troncature peuvent être illustrés en considérant une onde plane d'amplitude P_0 et de vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$:

$$p_0(\vec{r}) = P_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (5.5)$$

Le spectre de cette onde plane évaluée sur le plan vertical défini par $y = y_0$ est une distribution de Dirac localisée en $(\chi_x, \chi_z) = (k_x, k_z)$ (cf. Equ. 4.10):

$$p_0(\chi_x, \chi_z) = P_0 e^{-jk_y y_0} \delta(\chi_x - \frac{k_x}{2\pi}) \cdot \delta(\chi_z - \frac{k_z}{2\pi}) \quad (5.6)$$

Une fois convolué par le spectre de la fenêtre de troncature, le spectre de p_0 devient:

$$[p_0 * w](\chi_x, \chi_z) = L^2 P_0 e^{-jk_y y_0} \text{sinc}[L(\chi_x - \frac{k_x}{2\pi})] \times \text{sinc}[L(\chi_z - \frac{k_z}{2\pi})] \quad (5.7)$$

Il est représenté sur la figure 5.6.

Par comparaison avec le spectre obtenu avant troncature (cf. Fig. 4.2.2), on vérifie que la troncature rectangulaire se traduit par un étalement du spectre dont le support devient infini. De plus, il présente des oscillations qui sont liées au caractère plus ou moins brutal de la transition de la fenêtre de troncature (cf. phénomène de Gibbs). Ces phénomènes découlent directement des propriétés de la fonction *sinc*. Pour minimiser les effets de la troncature, il convient:

- *d'élargir le support de la fenêtre de troncature*: plus L augmente, plus le lobe principal du spectre $w(\chi_x, \chi_z)$ est étroit (cf. Fig. 5.6), ce qui réduit l'étalement du spectre de p_0 ,
- *d'adoucir la transition de la troncature*, en la pondérant par exemple par une fonction sinusoïdale, ce qui atténue l'amplitude des oscillations, mais tend en contrepartie à élargir le lobe principal de la fenêtre spectrale (cf. Fig. 5.7).

Les techniques de traitement du signal proposent une grande variété de pondérations permettant d'adoucir les transitions de la fenêtre de troncature (Bartlett, Hanning, Hamming, Blackman...) [Thomas, 1995].

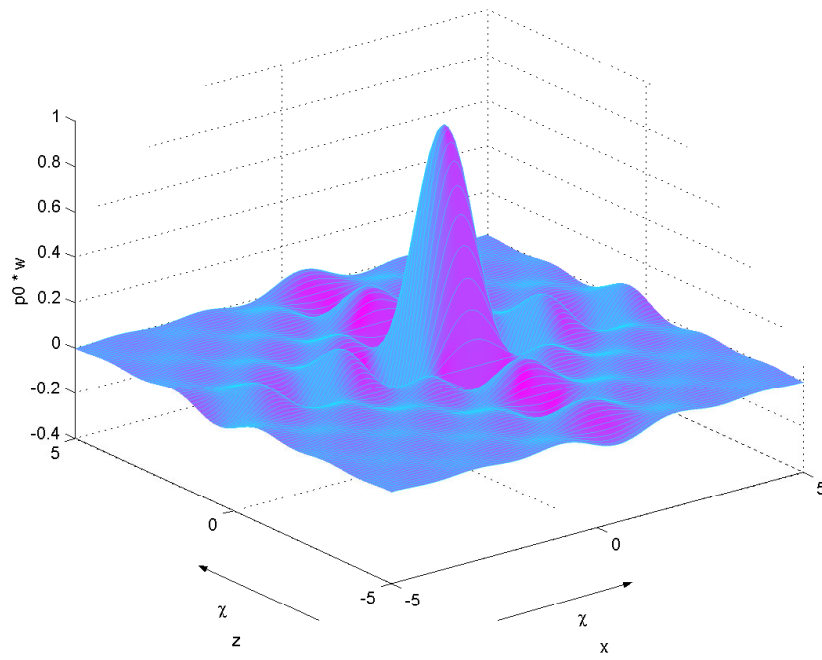
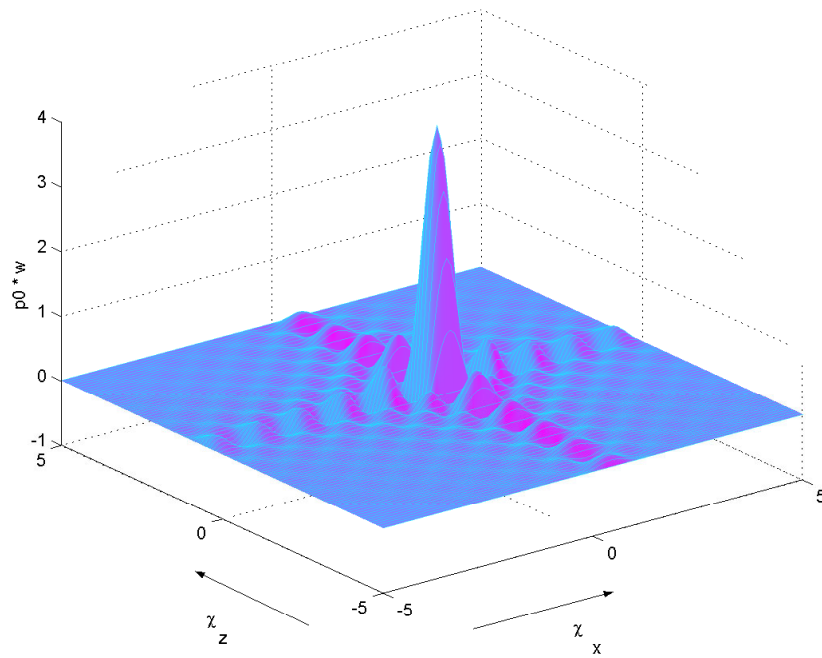
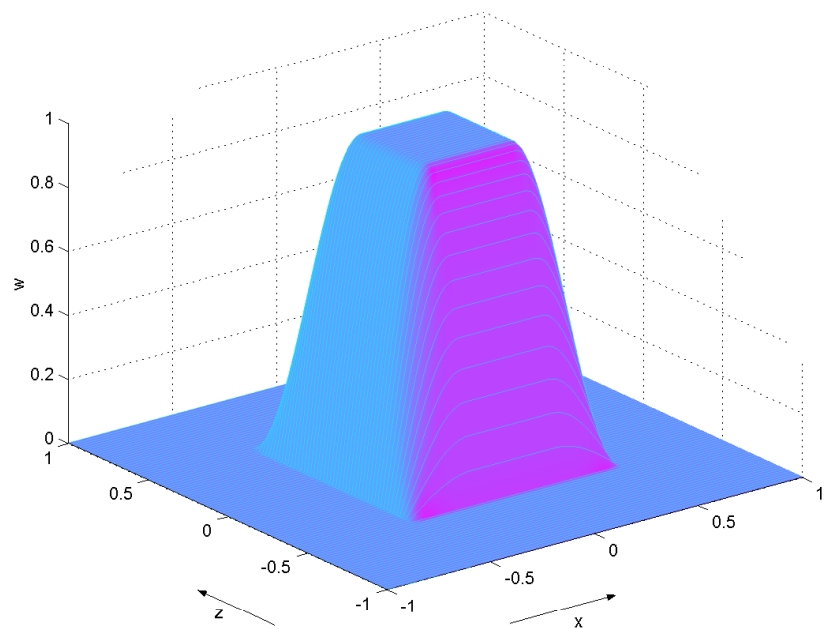
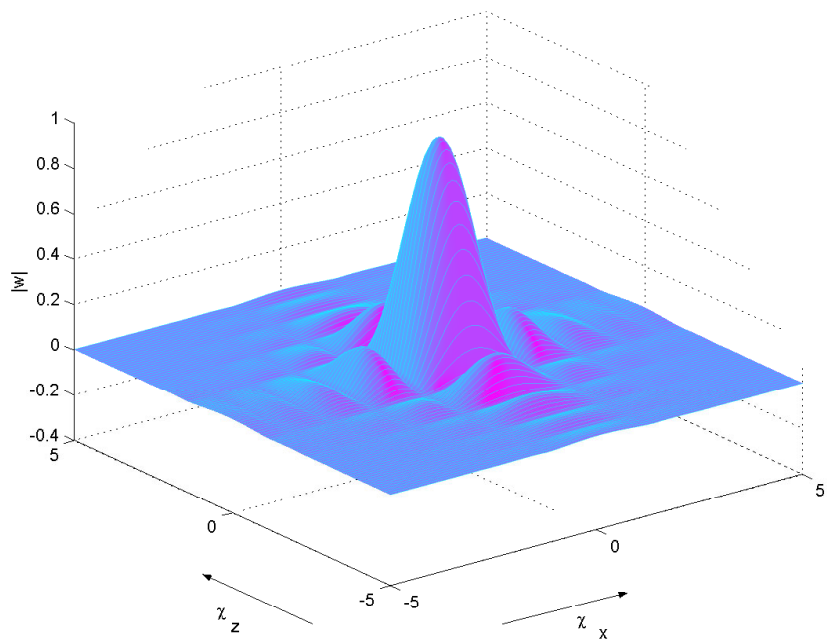

 (a) $L = 1$

 (b) $L = 2$

FIG. 5.6 - Effets de la troncature sur le spectre d'une onde plane p_0 ($P_0 = 1$, $(k_x, k_z) = (\pi, \pi)$, $y_0 = 0$): Influence de la taille de la fenêtre de troncature



(a) Fenêtre de troncature $w(x, y)$



(b) Spectre spatial associé $|W(\chi_x, \chi_y)|$ (module)

FIG. 5.7 - Fenêtre de troncature pondérée par une fonction sinusoïdale

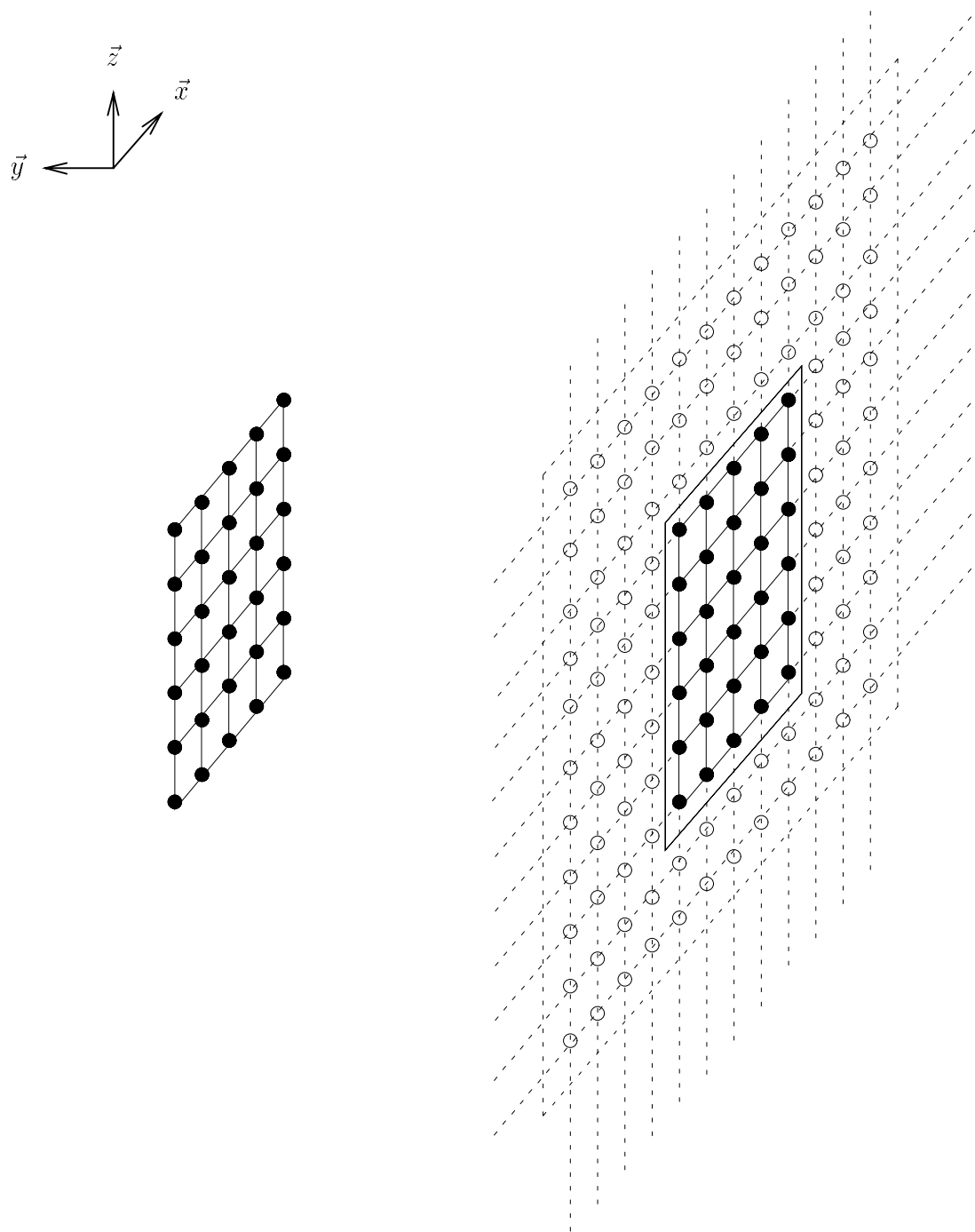


FIG. 5.8 - Analogie entre troncature et diffraction: Réseau tronqué et réseau infini masqué par un écran percé d'une ouverture

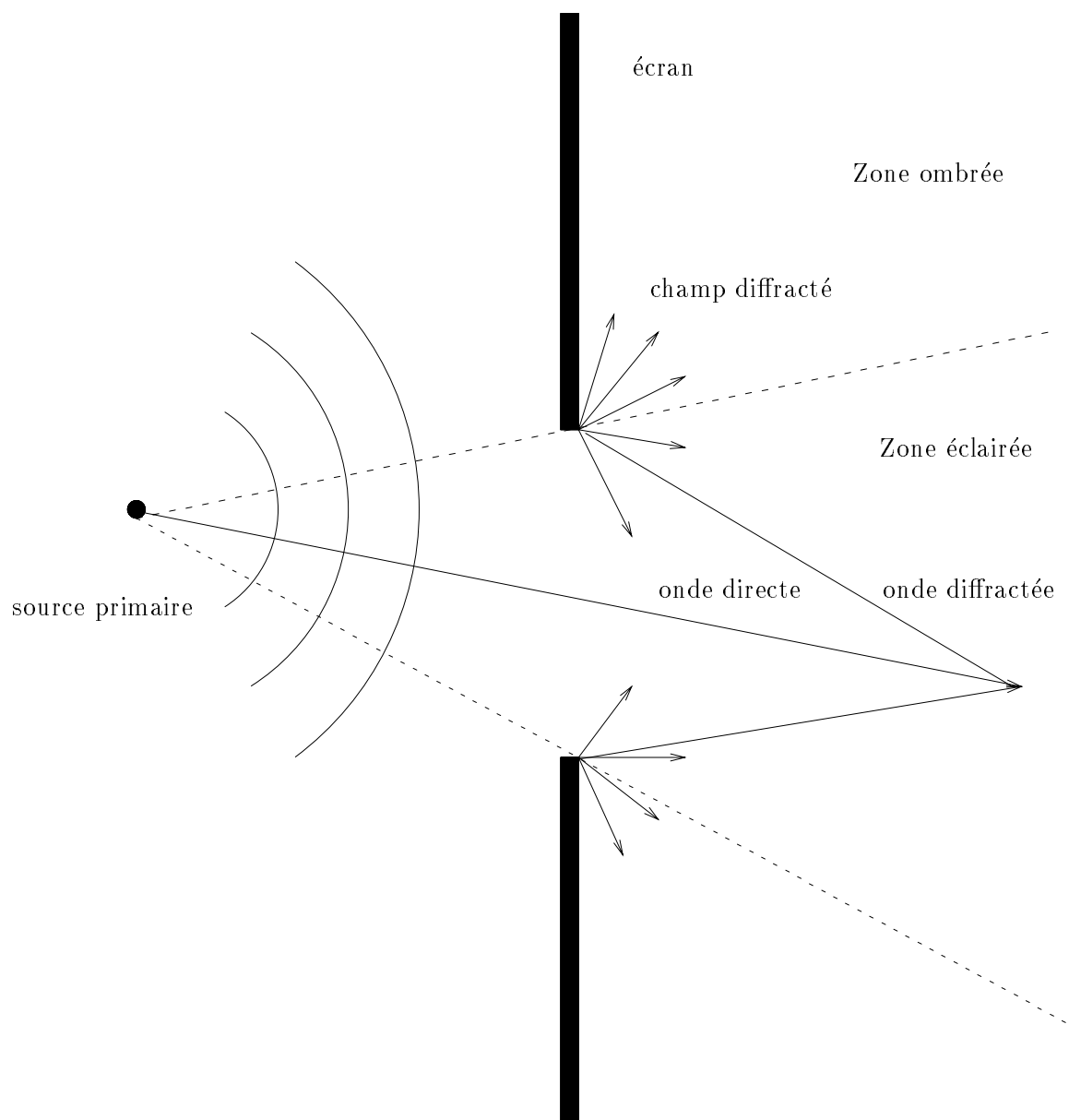


FIG. 5.9 - Phénomène de diffraction: A l'onde directe se superpose une onde diffractée générée par les bords de l'ouverture

Diffraction

Pour le problème de troncature de la distribution de sources secondaires, l'approche précédente inspirée des mathématiques du signal est la plus immédiate, mais elle ne fournit pas d'*interprétation pertinente de l'erreur de troncature*. Pour mieux comprendre l'incidence de la troncature des sources secondaires, il convient de reprendre le problème d'un point de vue *physique*.

Dans le phénomène de troncature, les sources secondaires qui sont supprimées peuvent être vues comme des sources qui sont alimentées par un signal nul, c'est-à-dire que les capteurs qui leur sont associés perçoivent un champ incident nul du fait qu'un écran vient intercepter l'onde primaire (cf. Fig. 5.8). En d'autres termes, la totalité des sources secondaires est présente, mais un écran percé d'une ouverture vient s'interposer entre la source primaire et le réseau de sources secondaires. Par analogie avec une source lumineuse, la source primaire éclaire le réseau de sources secondaires à travers l'ouverture et découpe ainsi une zone "lumineuse" qui correspond aux sources secondaires actives, tandis que les sources situées dans l'ombre de l'écran sont éteintes. Par suite, le champ reproduit par le réseau tronqué s'identifie au champ qu'aurait produit l'onde primaire interceptée par un écran plan infini percé d'une ouverture. La troncature de la distribution de sources secondaires correspond donc à un phénomène de diffraction.

À la lumière de cette seconde interprétation, on peut mieux analyser l'erreur de reconstruction que provoque la troncature du réseau. Considérons une source acoustique qui rayonne dans un espace infini dans lequel est disposé un écran plan vertical infini qui est percé d'une ouverture de forme carrée (cf. Fig. 5.9). Le champ perçu de l'autre côté de l'écran est perturbé par le phénomène de diffraction: à l'onde directe, qui correspondrait à une propagation sans obstacle, se superpose une onde diffractée qui est émise par les bords de l'ouverture [Bruneau, 1983]. De plus, on distingue deux zones (cf. Fig. 5.9):

- la zone *éclairée* qui voit directement la source primaire et dans laquelle le champ induit se compose d'une onde directe et d'une onde diffractée,
- la zone *ombrée* dans laquelle seule l'onde diffractée est présente, l'onde directe étant interceptée par l'écran.

Cette interprétation se vérifie en analysant l'onde synthétisée par un réseau tronqué de sources secondaires, dans lequel il est facile d'identifier la présence d'une onde diffractée. La géométrie du réseau, ainsi que les positions de la source primaire et des récepteurs chargés d'enregistrer l'onde de pression synthétisée sont illustrées sur la figure 5.10. L'onde reconstruite par les sources secondaires est représentée sur la figure 5.11. L'onde originale induite par la source primaire est également illustrée. Dans les deux cas, il s'agit d'une simulation numérique (cf. Annexe E). On observe sur l'onde synthétisée par les sources secondaires que le front d'onde primaire est suivi de plusieurs fronts d'onde additionnels qui empiètent partiellement sur le premier front d'onde, notamment pour les positions latérales. Ces fronts d'onde parasites constituent l'erreur de troncature et il est frappant de constater que dans le signal d'erreur, on est capable d'identifier la forme de plusieurs fronts d'onde qui semblent bien associés à des ondes diffractées.

L'onde diffractée par un écran peut être calculée par des méthodes analytiques ou numériques basées sur différents modèles de la diffraction (Théorie de Kirchhoff-Fresnel, Théorie de Sommerfeld, Théorie géométrique de Keller...) [Bruneau, 1983]. Afin d'établir que l'erreur de troncature correspond bien à l'onde diffractée par le bord du réseau de sources secondaires, nous allons utiliser l'une de ces méthodes pour évaluer l'onde diffractée dans le but de la comparer à l'erreur de troncature. La méthode choisie pour modéliser l'onde diffractée est basée sur le résultat de l'*Intégrale de Rubinowicz* [Bruneau, 1983]. Parmi toutes les approches de modélisation de la diffraction, l'approche de Rubinowicz en effet n'est pas seulement la méthode la mieux adaptée à notre problème, mais elle conduit directement à une *modélisation exacte de l'erreur de troncature*, ce qui va être développé dans les lignes qui suivent.

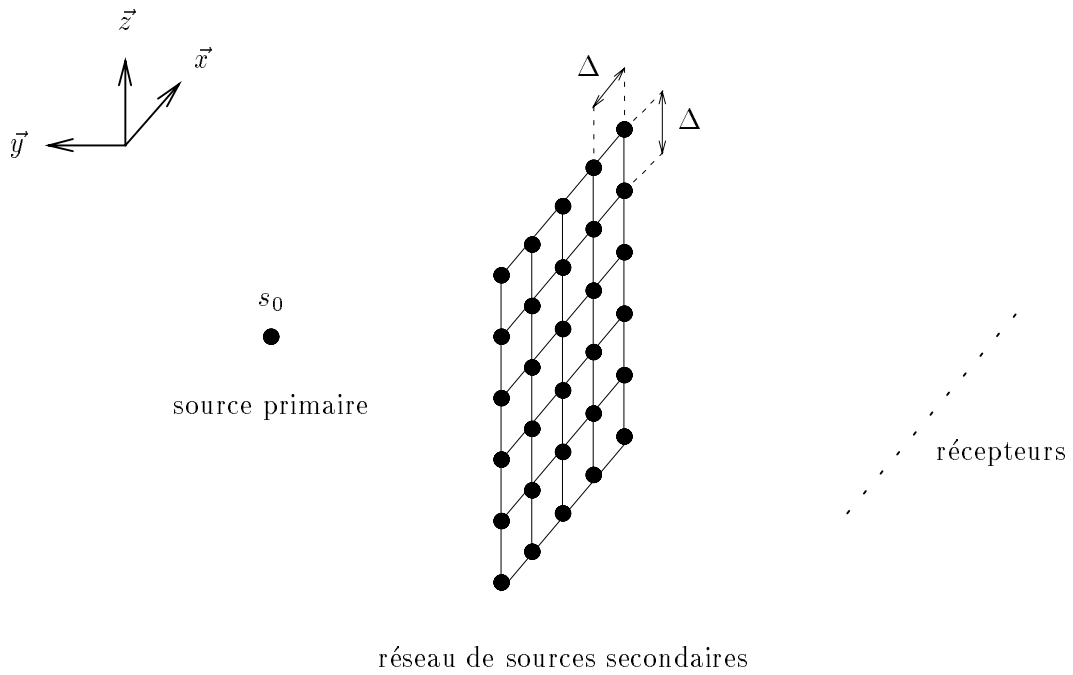
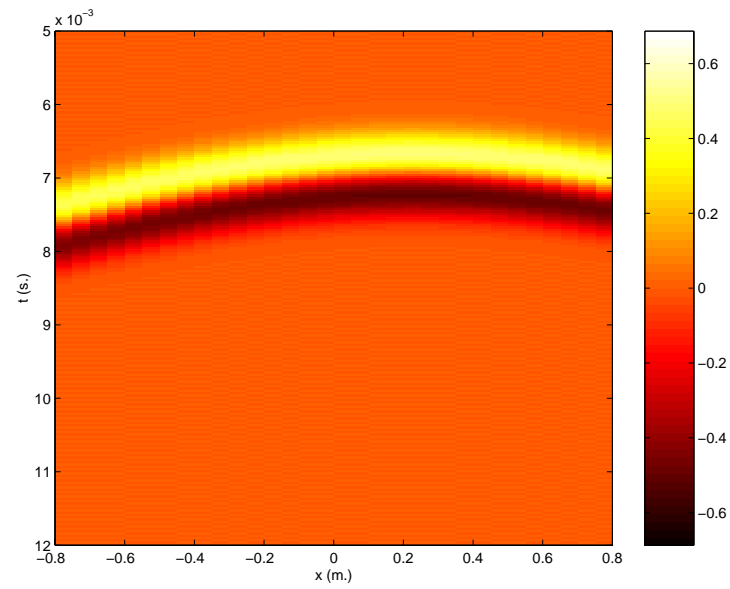
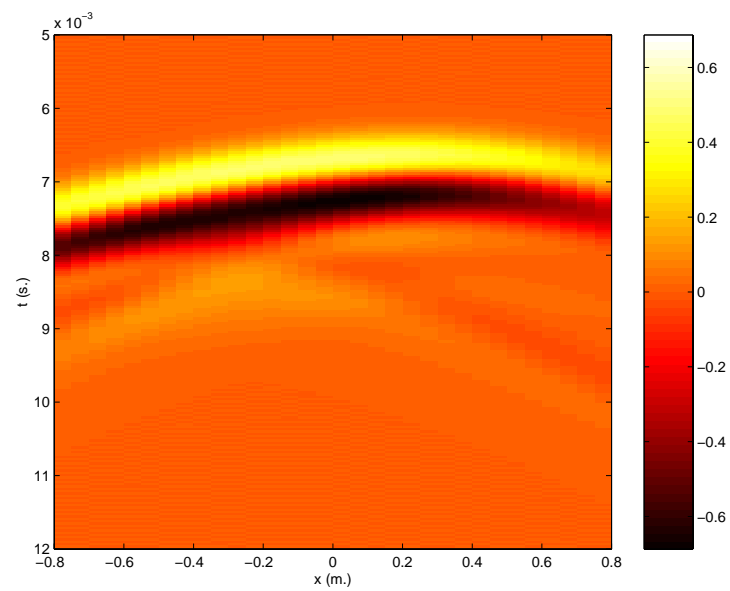


FIG. 5.10 - Mise en évidence de l'onde diffractée par un réseau 2D carré: Configuration de la source primaire, des sources secondaires et des récepteurs (les récepteurs sont situés dans le plan horizontal défini par l'équation $z = 0$ — récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$ —, les sources secondaires sont réparties sur un réseau plan vertical de forme carrée centré sur l'origine du repère — réseau carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m. —, cf. Annexes E & F)



(a) Source primaire



(b) Sources secondaires

FIG. 5.11 - Onde de pression originale et onde synthétisée par un réseau carré de sources secondaires: Le front d'onde est suivi d'une onde résiduelle qui correspond à l'onde diffractée (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)

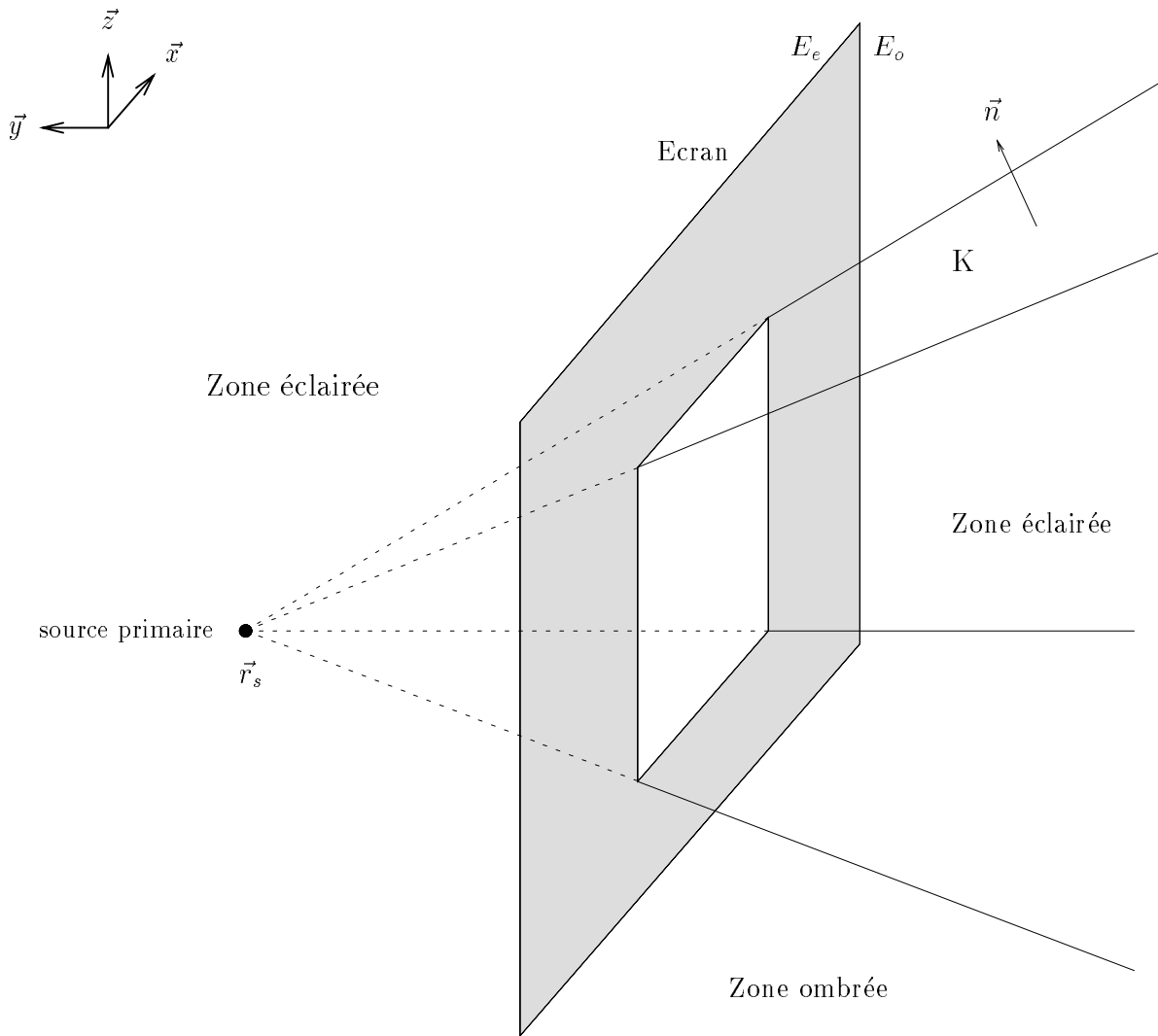


FIG. 5.12 - Géométrie du problème de Rubinowicz

5.1.4 Modélisation de l'erreur de troncature par l'intégrale de Rubinowicz

Intégrale de diffraction de Rubinowicz

Dans le cadre des théories de la diffraction, l'Intégrale de Rubinowicz [Bruneau, 1983] [Skudrzyk, 1971] s'applique au calcul de l'onde diffractée par un écran percé d'une ouverture (cf. Fig. 5.12). Elle est obtenue en exprimant le problème sous la forme d'un *problème aux limites* dont la solution est donnée par une équation intégrale (cf. Annexe A).

L'espace est décomposé en deux zones (cf. Fig. 5.12) :

- la zone *éclairée* Ω_e , comprenant le demi-espace situé en amont de l'écran, ainsi que le cône tronqué constituant le "faisceau" découpé par l'ouverture en aval de l'écran,
- la zone *ombrée* Ω_o , correspondant au domaine en aval de l'écran dans lequel l'onde directe émise par la source primaire est interceptée par l'écran.

Dans chacune de ces zones, on définit un problème aux limites¹ dont la solution s'écrit (cf. Annexe A):

– pour la zone éclairée:

$$p(\vec{r}, \omega) = \iiint_{\Omega_e} dV_0 s(\vec{r}_0, \omega) g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) + \iint_{K \cup E_e} dS_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} p_0(\vec{r}_0, \omega) - p_0(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \right] \quad \forall \vec{r} \in \Omega_e \quad (5.8)$$

– pour la zone ombrée:

$$p(\vec{r}, \omega) = - \iint_{K \cup E_o} dS_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} p_0(\vec{r}_0, \omega) - p_0(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \right] \quad \forall \vec{r} \in \Omega_o \quad (5.9)$$

Dans ces expressions, les surfaces K , E_e et E_o désignent respectivement la surface du cône tronqué défini par le faisceau, la surface éclairée de l'écran et sa surface ombrée.

Sous les hypothèses de Kirchhoff, la surface de l'écran est parfaitement anéchoïque, par suite, la pression acoustique et son gradient sont nuls sur les surfaces éclairée E_e et ombrée E_o de l'écran. Dans les équations précédentes, l'intégrale double se limite donc à la surface K du cône:

– si $\vec{r} \in \Omega_e$:

$$p(\vec{r}, \omega) = \iiint_{\Omega_e} dV_0 s(\vec{r}_0, \omega) g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) + \iint_K dS_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} p_0(\vec{r}_0, \omega) - p_0(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \right] \quad \forall \vec{r} \in \Omega_e \quad (5.10)$$

– si $\vec{r} \in \Omega_o$:

$$p(\vec{r}, \omega) = - \iint_K dS_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} p_0(\vec{r}_0, \omega) - p_0(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \right] \quad \forall \vec{r} \in \Omega_o \quad (5.11)$$

Dans la zone éclairée, l'onde de pression comporte deux termes p_{dir} et p_{dif} :

$$p(\vec{r}, \omega) = p_{dir}(\vec{r}, \omega) + p_{dif}(\vec{r}, \omega) \quad \forall \vec{r} \in \Omega_e \quad (5.12)$$

qui s'interprètent respectivement comme:

– l'onde *directe* émise par la source primaire sans prendre en compte la présence de l'écran:

$$p_{dir}(\vec{r}, \omega) = \iiint_{\Omega_e} dV_0 s(\vec{r}_0, \omega) g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \quad (5.13)$$

– l'onde *diffRACTÉE* par l'écran:

$$p_{dif}(\vec{r}, \omega) = - \iint_K dS_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} p_0(\vec{r}_0, \omega) - p_0(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \right] \quad (5.14)$$

En revanche, dans la zone d'ombre, seul l'onde diffractée est présente:

$$p(\vec{r}, \omega) = p_{dif}(\vec{r}, \omega) \quad \forall \vec{r} \in \Omega_o \quad (5.15)$$

L'onde diffractée est ainsi modélisée par une intégrale double appliquée sur la surface K du cône (cf. Equ. 5.14). Il s'agit du premier résultat de la théorie de Rubinowicz.

1. L'onde acoustique satisfait aux conditions de Sommerfeld à l'infini.

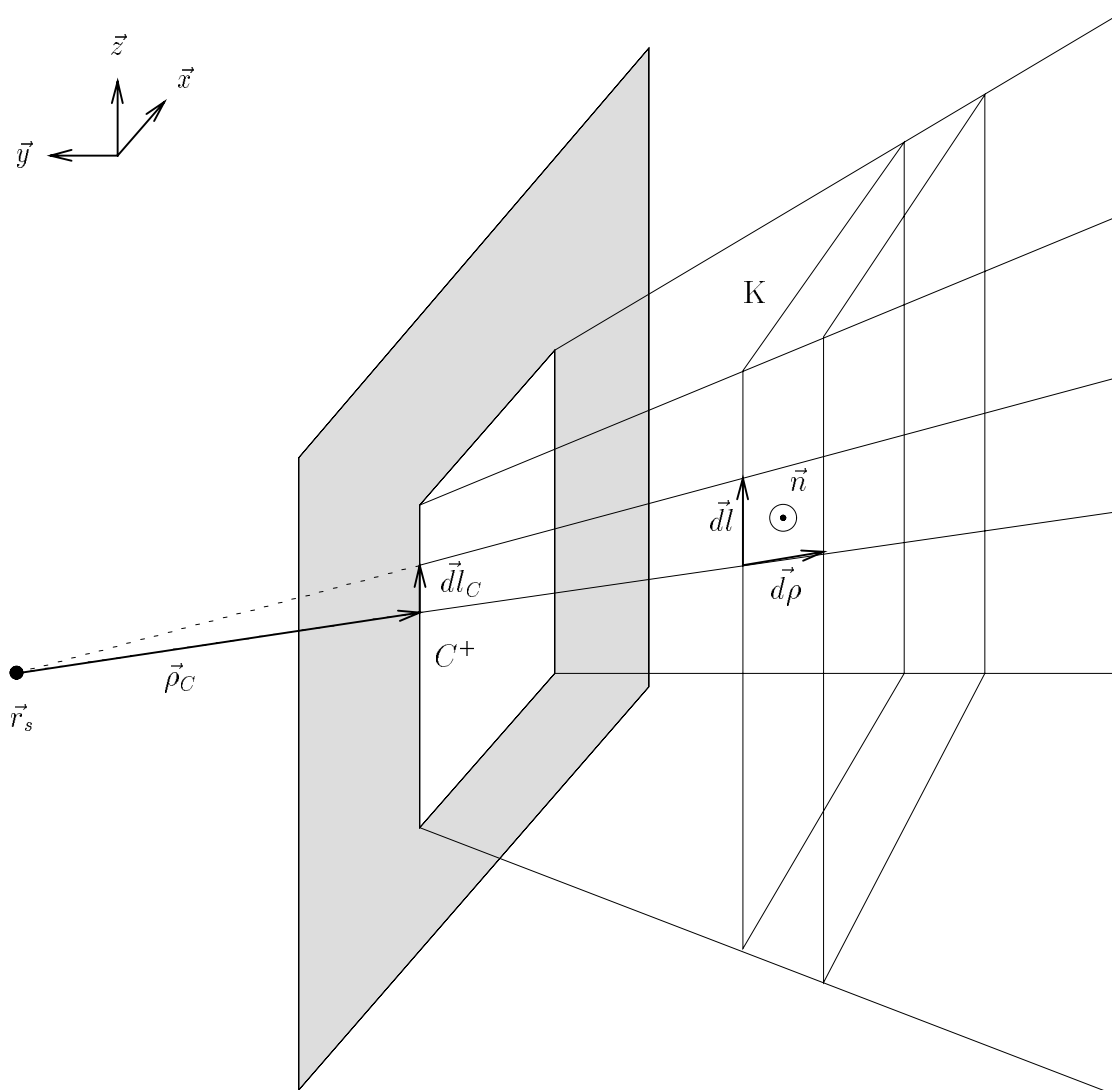


FIG. 5.13 - Repère associé à la surface K du cône

Dans une seconde étape, on va montrer qu'en tenant compte de la géométrie du problème, on peut exprimer la primitive de l'intégrand, de façon à ramener l'intégrale double à une intégrale simple appliquée sur le contour de l'ouverture. On choisit pour fonction de Green, la solution fondamentale en espace infini:

$$g_{\infty}(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \text{avec} \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_0| \quad (5.16)$$

Par ailleurs, on considère que la source primaire est un monopôle de spectre $A_0(\omega)$ et situé au point \vec{r}_s . L'onde primaire p_0 est donc donnée par:

$$p_0(\vec{r}_0, \omega) = A_0(\omega) \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \quad \text{avec} \quad \rho = |\vec{r}_0 - \vec{r}_s| \quad (5.17)$$

On suppose de plus que, sur la surface K , cette onde n'est pas perturbée par la présence de l'écran (cf. Hypothèses de Kirchhoff).

Avec ces hypothèses, le premier terme de l'intégrand de l'intégrale de diffraction (cf. Equ. 5.14) disparaît. En effet, étant donnée la géométrie de la surface K (cf. Fig. 5.12), le gradient de la pression primaire $\vec{\nabla} p_0$ est orienté parallèlement à K , de telle sorte que le produit scalaire du gradient avec la normale \vec{n} à K s'annule [Bruneau, 1983]. L'intégrale de diffraction devient:

$$p_{dif}(\vec{r}, \omega) = \iint_K dS_0 A_0(\omega) \frac{e^{-jk(\rho+R)}}{4\pi\rho R^2} (1+jkR) \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{n} \quad (5.18)$$

La surface K étant munie d'un repère convenablement choisi (cf. Fig. 5.13), cette intégrale s'écrit sous la forme suivante:

$$p_{dif}(\vec{r}, \omega) = A_0(\omega) \oint_{C^+} \frac{1}{\rho_C^2} \vec{R}_C \cdot (\vec{\rho}_C \wedge \vec{dl}_c) \int_{\rho_C}^{+\infty} \frac{e^{-jk(\rho+R)}}{4\pi R^3} (1+jkR) d\rho \quad (5.19)$$

où l'indice C repère un point du contour C . Or, on montre que l'intégrand de la seconde intégrale peut être exprimé comme la dérivée d'une fonction [Bruneau, 1983]:

$$\frac{e^{jk(\rho+R)}}{4\pi R^3} (1+jkR) = -\frac{d}{d\rho} \left[\frac{\rho}{R} \frac{e^{-jk\rho+R}}{R\rho + \vec{R} \cdot \vec{\rho}} \right]$$

Par suite, l'intégrale portant sur la variable ρ est remplacée par la primitive ainsi mise en évidence et il ne reste plus que l'intégrale sur le contour C de l'ouverture:

$$p_{dif}(\vec{r}, \omega) = A_0(\omega) \oint_{C^+} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \frac{\vec{R}_C \cdot (\vec{\rho}_C \wedge \vec{dl})}{R\rho + \vec{R} \cdot \vec{\rho}} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (5.20)$$

qui peut encore s'écrire [Bruneau, 1983]:

$$p_{dif}(\vec{r}, \omega) = A_0(\omega) \oint_{C^+} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \frac{\cos(\vec{R}, \vec{n}) \sin(\vec{\rho}, \vec{dl})}{1 + \cos(\vec{R}, \vec{\rho})} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (5.21)$$

où les vecteurs $\vec{\rho}$ et \vec{R} sont définis par (cf. Fig. 5.14):

$$\begin{cases} \vec{\rho} &= \vec{r}_C - \vec{r}_s \\ \vec{R} &= \vec{r}_C - \vec{r} \end{cases}$$

Le vecteur \vec{r}_C repère un point du contour C . Dans les deux dernières équations, l'indice C a été omis puisque l'intégrale porte explicitement sur le contour C .

L'intégrale de Rubinowicz (Equ. 5.20 & 5.21) modélise l'onde diffractée sous la forme d'une distribution de sources sur le bord de l'ouverture. Le second résultat contenu dans l'intégrale de Rubinowicz est ainsi la validation indirecte de l'idée selon laquelle l'onde diffractée est générée par le bord de l'ouverture, moyennant les hypothèses retenues (Hypothèses de Kirchhoff).

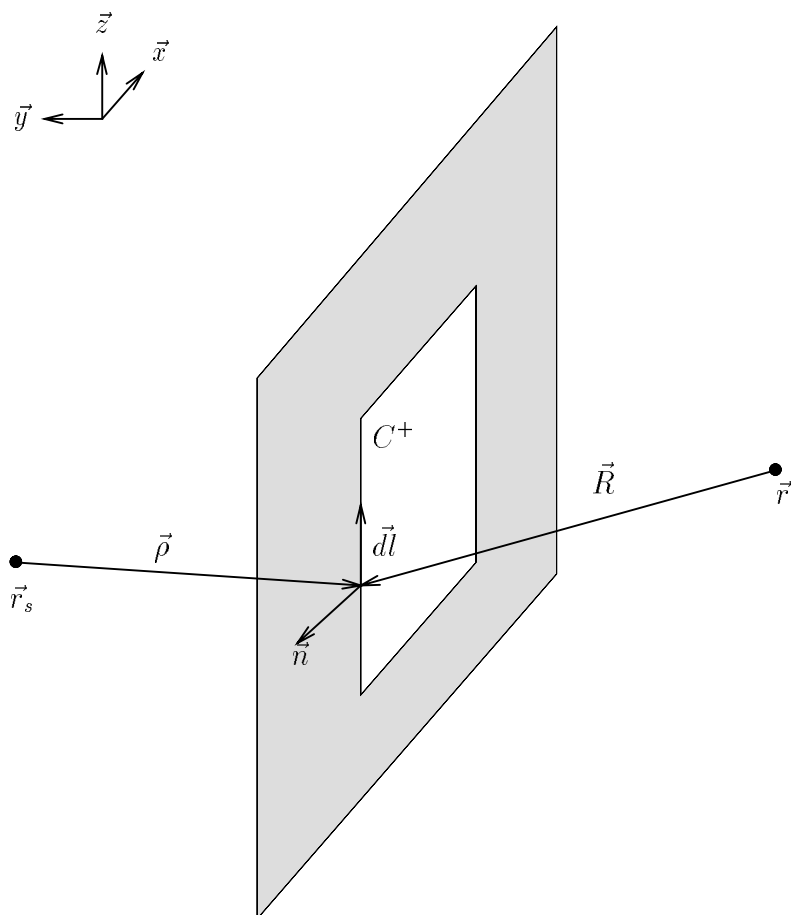


FIG. 5.14 - Notations relatives à l'intégrale de Rubinowicz (la normale \vec{n} est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{\rho}$ et $d\vec{l}$)

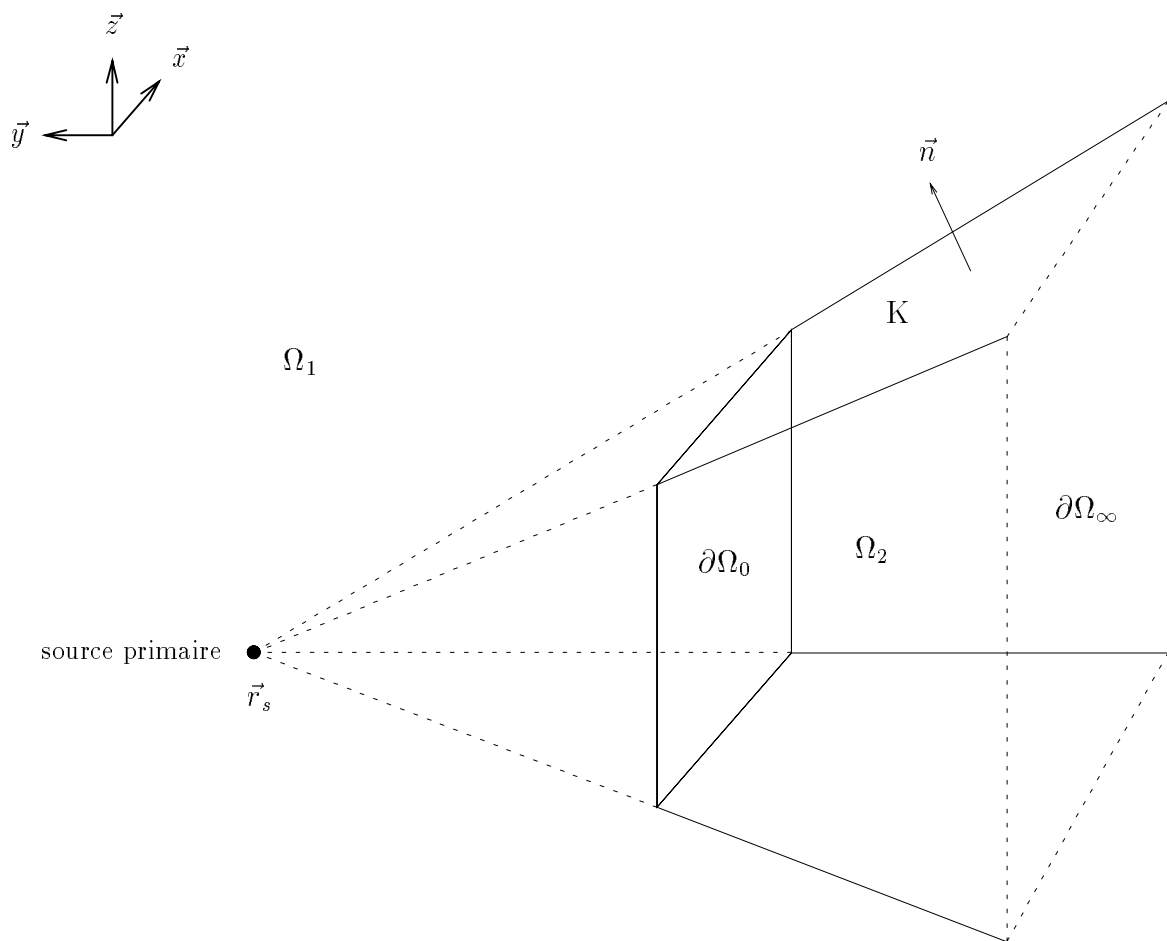


FIG. 5.15 - Géométrie de Rubinowicz appliquée au problème de troncature d'un réseau de sources secondaires

Application au calcul de l'erreur de troncature

Le résultat de Rubinowicz va à présent être appliqué au problème de troncature d'un réseau de sources secondaires. Dans ce but, la partition de l'espace pour distinguer le domaine de prise de son Ω_1 (sources primaires) et le domaine de restitution Ω_2 (auditeurs) est modifiée afin de se ramener à la géométrie du problème de Rubinowicz. Comme précédemment, la source primaire est un monopôle situé en \vec{r}_s . On se propose de la reproduire par un réseau plan vertical de sources secondaires. Des rayons tirés à partir de la source primaire en suivant le bord du réseau de sources secondaires définissent un cône de section rectangulaire (cf. Fig. 5.15). On choisit pour domaine de restitution l'espace Ω_2 délimité par ce cône tronqué à son extrémité par le réseau de sources secondaires.

En vertu de l'intégrale de Kirchhoff, l'onde induite par la source primaire dans ce domaine peut être reproduite par une distribution de sources secondaires réparties sur toute sa frontière qui en l'occurrence est constituée des deux sections $\partial\Omega_0$, $\partial\Omega_\infty$ et de la surface K (cf. Fig. 5.15):

$$p(\vec{r}, \omega) = \iint_{\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_\infty \cup K} dS_0 \left[\vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} - \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{n} (1 + jkR) \frac{p(\vec{r}_0, \omega)}{R} \right] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \forall \vec{r} \in \Omega_2 \quad (5.22)$$

La section $\partial\Omega_\infty$ étant rejetée à l'infini, sa contribution est nulle, attendu que le champ vérifie les conditions de Sommerfeld.

Par suite, l'onde primaire peut être reconstruit exactement à condition de disposer des sources sur les surfaces $\partial\Omega_0$ et K . Comme l'intégrale sur $\partial\Omega_0$ correspond à la contribution du réseau planaire tronqué, il en résulte que l'intégrale portant sur la surface K s'interprète comme l'erreur de troncature. Si p_{pri} , p_{sec} et p_K désignent respectivement les ondes induites par la source primaire, le réseau tronqué $\partial\Omega_0$ et les sources secondaires distribuées le long de la surface du cône K , l'équation précédente (cf. Equ. 5.22) se réécrit:

$$p_{pri} = p_{sec} + p_K \quad (5.23)$$

L'erreur de troncature, définie par:

$$p_{trunc} = p_{sec} - p_{pri} \quad (5.24)$$

est donc parfaitement modélisée par l'intégrale sur K :

$$\begin{aligned} p_{trunc}(\vec{r}, \omega) &= -p_K \\ &= - \iint_K dS_0 \left[\vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} - \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{n} (1 + jkR) \frac{p(\vec{r}_0, \omega)}{R} \right] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \forall \vec{r} \in \Omega_2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

dans laquelle on reconnaît l'intégrale de Rubinowicz (cf. Equ. 5.14).

De même que dans le problème de diffraction, l'intégrale double se simplifie pour donner une intégrale simple appliquée sur le contour du réseau plan de sources secondaires $\partial\Omega_0$ (cf. Equ. 5.21):

$$p_{trunc}(\vec{r}, \omega) = A_0(\omega) \oint_{C^+} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \frac{\cos(\vec{R}, \vec{n}) \sin(\vec{\rho}, \vec{dl})}{1 + \cos(\vec{R}, \vec{\rho})} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (5.26)$$

Ce résultat démontre que l'erreur de troncature s'identifie bien à une onde diffractée par le bord du réseau de sources secondaires.

La simplification de l'intégrale sur la surface K en une intégrale curviligne constitue l'apport le plus intéressant de l'approche de Rubinowicz du point de vue de notre problème, dans la mesure où elle fournit une formulation analytique compacte de l'erreur de troncature. Ainsi, bien qu'à l'origine ce soit en posant le problème en terme de diffraction que le lien entre notre problème et l'intégrale de Rubinowicz a été mis à jour, au final, la théorie de la diffraction qu'elle définit est oubliée au profit du résultat mathématique qu'elle contient. Ce dernier n'est pas sans évoquer l'approximation de la phase stationnaire (cf. Annexe D), mais il faut noter que cette simplification repose sur un calcul exact et ne prend en compte aucune approximation².

2. Une approche similaire a été étudiée à l'U.T.D., les résultats rappellent l'Intégrale de Rubinowicz, mais la réduction de l'intégrale est basée sur un calcul approché qui utilise un processus itératif d'intégration par parties et qui conduit à un développement asymptotique limité aux premiers ordres du terme d'erreur [Verheijen, 1997] [Start, 1997] [de Vries *et al.*, 1994b].

Il est important de noter que l'intégrale de Rubinowicz (cf. Equ. 5.26) modélise l'erreur de troncature induite dans la *zone éclairée* uniquement. Lorsqu'elle est évaluée pour un récepteur situé dans la zone d'ombre, l'intégrale de Rubinowicz correspond toujours à une onde diffractée, mais elle ne modélise pas parfaitement l'onde diffractée induite par le réseau de sources secondaires et de plus elle la donne en opposition de phase. En outre, définir une erreur de troncature dans la zone d'ombre n'a pas de sens, dans la mesure où la pression p_{sec} qui y est induite par le réseau de sources secondaires ne comporte plus d'onde primaire et est uniquement constituée d'une onde diffractée. En d'autres termes, l'onde présente dans la zone ombrée n'est qu'un signal d'erreur. Il est donc vain de chercher à restaurer une onde primaire qui n'existe pas: la correction de l'effet de troncature n'a de sens que dans la zone éclairée. Si on désire améliorer la restitution dans la zone d'ombre, il est plus pertinent d'augmenter la longueur du réseau de sources secondaires afin d'étendre la zone éclairée. Dorénavant, on s'intéressera exclusivement à la zone éclairée.

Source de Rubinowicz

Au delà de l'analogie avec un phénomène de diffraction, l'approche de Rubinowicz contient une seconde idée qui mérite d'être approfondie: dans l'intégrale de Rubinowicz (cf. Equ. 5.26), le signal d'erreur résultant de la troncature du réseau de sources secondaires est associé à une distribution de sources, c'est-à-dire qu'il est exprimé comme l'onde émise par un réseau linéaire de sources réparties sur le contour du réseau. Ces sources, dites "sources de Rubinowicz", ont, en première approximation, un *comportement monopolaire* décrit par le terme:

$$\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$$

et elles sont alimentées par le *signal de pression* induit par la source primaire à leur emplacement:

$$A_0(\omega) \frac{e^{-jk\rho}}{\rho}$$

signal qui peut être enregistré par un microphone de pression.

Un troisième terme intervient:

$$\eta_{Rubinowicz}(\vec{\rho}, \vec{R}) = \frac{\cos(\vec{R}, \vec{n}) \sin(\vec{\rho}, \vec{dl})}{1 + \cos(\vec{R}, \vec{\rho})}$$

mais son interprétation physique est délicate. Il traduit un *comportement directif* des transducteurs, à la fois des sources et des capteurs qui leur sont associés:

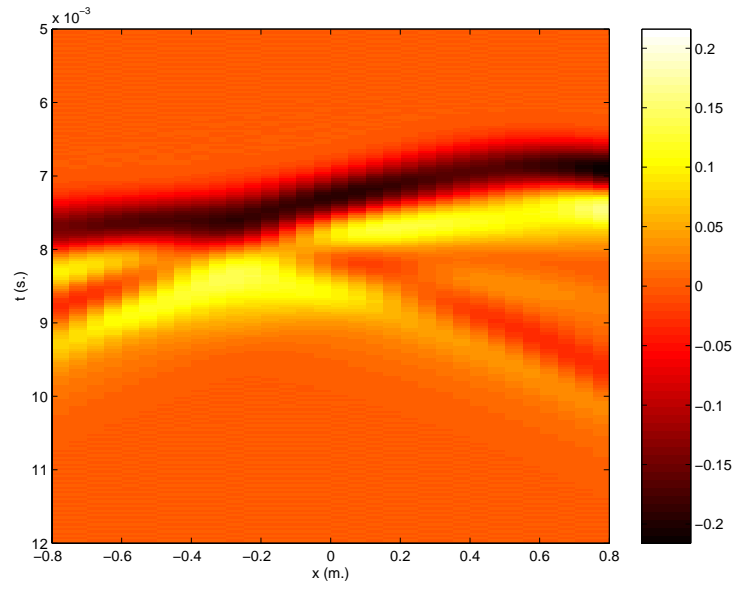
- au niveau de la *prise de son*, il introduit une dépendance en fonction de la *direction de la source primaire* que dénote le vecteur $\vec{\rho}$, ce qui définit bien une prise de son par un capteur directif,
- au niveau de la *restitution*, il introduit une dépendance en fonction de la *direction de récepteur* que dénote le vecteur \vec{R} , ce qui définit le caractère directif de la source de Rubinowicz,

Cependant, dans l'expression de cette directivité, les dépendances en fonction des vecteurs $\vec{\rho}$ et \vec{R} ne peuvent être complètement dissociées de façon à faire ressortir séparément la directivité du capteur et celle de la source³. Par suite, il s'interprète plutôt comme une directivité mixte du système capteur-émetteur considéré dans sa globalité. Cette idée peut cependant être reformulée d'une autre manière, plus pertinente d'un point de vue physique et qui consiste à reporter l'intégralité du terme de directivité sur l'un des transducteurs: on considère

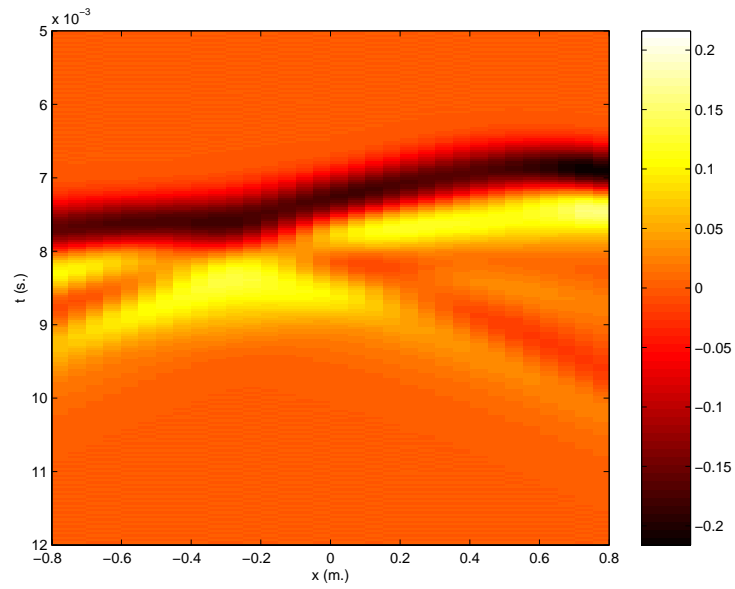
- soit un capteur directif associé à un émetteur omnidirectionnel,
- soit un capteur omnidirectif associé à un émetteur directif.

Dans les deux cas, la directivité du transducteur est assujettie à la position du récepteur — cas d'un capteur directif — ou de la source primaire — cas d'un émetteur directive —, qui détermine l'orientation de son axe de directivité.

3. Dans l'intégrale de Kirchhoff, les directivités du capteur et de l'émetteur associé qui constituent la source secondaire sont en revanche clairement séparées.



(a) Erreur de troncature



(b) Intégrale de Rubinowicz

FIG. 5.16 - Comparaison entre l'erreur de troncature et l'onde diffractée par une ouverture carrée obtenue par le modèle de Rubinowicz (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)

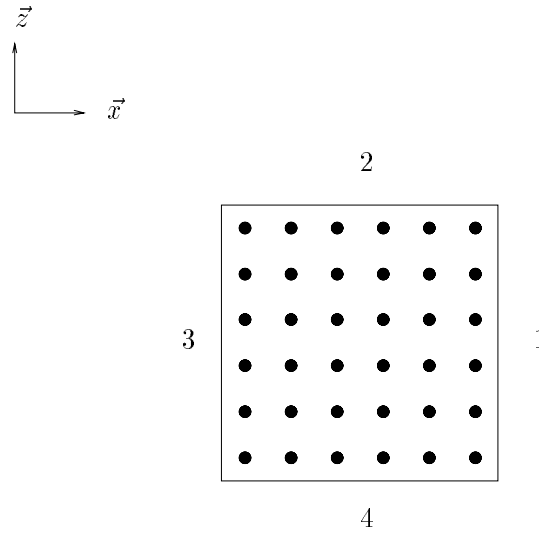


FIG. 5.17 - Contour de l'ouverture associée au réseau tronqué de sources secondaires

Par ailleurs, il convient de noter que cette directivité est complexe et s'éloigne notablement des caractéristiques des sources acoustiques usuelles. Elle combine trois termes:

$$\cos(\vec{R}, \vec{n}) , \quad \sin(\vec{\rho}, \vec{dl}) , \quad \frac{1}{1 + \cos(\vec{R}, \vec{\rho})}$$

On remarque que le dernier terme diverge si les vecteurs $\vec{\rho}$ et \vec{R} sont colinéaires et de sens opposés, puisque:

$$\cos(\vec{R}, \vec{\rho}) = -1$$

ce qui se produit lorsque l'erreur de troncature est évaluée sur la surface du cône K . Cette discontinuité de l'onde diffractée au niveau de la frontière entre la zone éclairée et la zone d'ombre est un artéfact de la modélisation de Rubinowicz. Dans l'approche de Rubinowicz, l'onde totale émise par les sources secondaires est décomposée en une onde primaire et une onde diffractée. Or, même si elle est pertinente d'un point de vue physique, cette décomposition est arbitraire et, alors que l'onde globale est continue, elle introduit une discontinuité, du fait que l'onde primaire s'annule brusquement au niveau de la frontière virtuelle que constitue la surface de séparation entre la zone éclairée et la zone d'ombre. Afin de compenser cette discontinuité sur l'onde primaire, l'onde diffractée présente une discontinuité au même endroit [Skudrzyk, 1971], mais cette discontinuité n'a pas de sens physique. D'ailleurs, si l'onde diffractée est évaluée avec un autre modèle basé sur l'approximation de Fresnel (cf. Section 5.3.2), aucune discontinuité n'est mise en évidence. Néanmoins, cette discontinuité du modèle de l'onde diffractée n'est pas problématique, étant donné que l'on s'intéresse exclusivement à la zone éclairée.

Du point de vue de notre problème de troncature, l'intégrale de Rubinowicz (cf. Equ. 5.26) présente un double intérêt. D'une part, elle permet de *quantifier l'erreur de troncature* sous une forme *analytique* compacte. La figure 5.16 compare l'erreur de troncature p_{tronc} obtenue à partir de l'équation 5.24 en soustrayant directement l'onde primaire à l'onde synthétisée par les sources et son évaluation par l'intégrale de Rubinowicz (cf. Equ. 5.26). La configuration du réseau de sources secondaires, de la source primaire et des récepteurs choisie à la section précédente est conservée (cf. Fig. 5.10 & 5.11). On vérifie que l'intégrale de Rubinowicz modélise parfaitement l'onde diffractée.

Au delà de la simple modélisation de l'erreur de troncature, l'intégrale de Rubinowicz constitue un *outil d'analyse* des mécanismes de la troncature avec une approche fondée sur une interprétation *physique* des phénomènes. A titre d'exemple, les contributions isolées des quatre côtés du contour (cf. Fig. 5.17) sont reproduites sur la figure 5.18. Ces graphiques montrent clairement comment l'erreur totale de troncature (cf. Fig. 5.16) est la superposition de quatre ondes diffractées, chaque côté du contour (qui, en l'occurrence, est

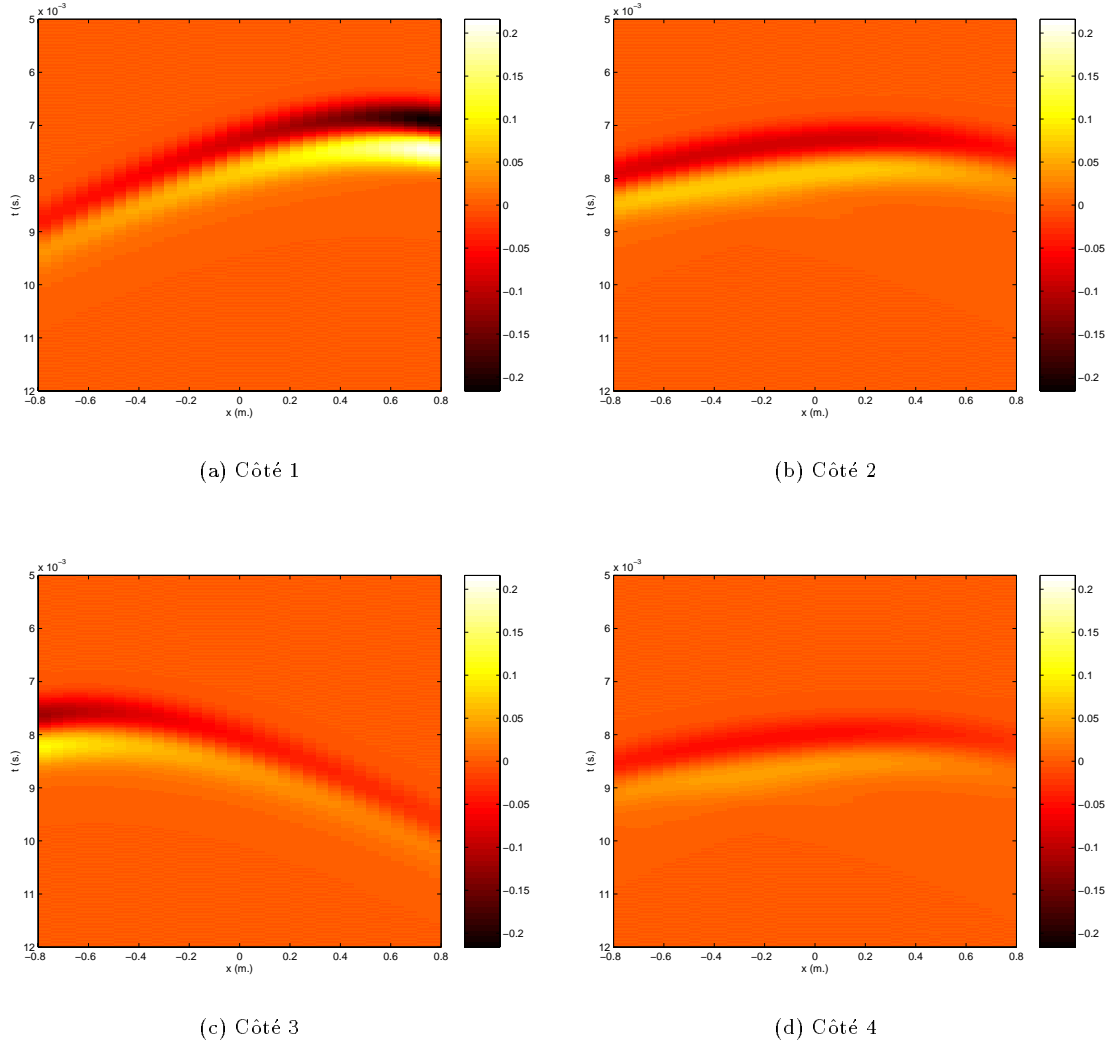


FIG. 5.18 - Mise en évidence des 4 ondes diffractées correspondant aux 4 côtés qui définissent le contour de l'ouverture — cf. Fig. 5.17 — (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)

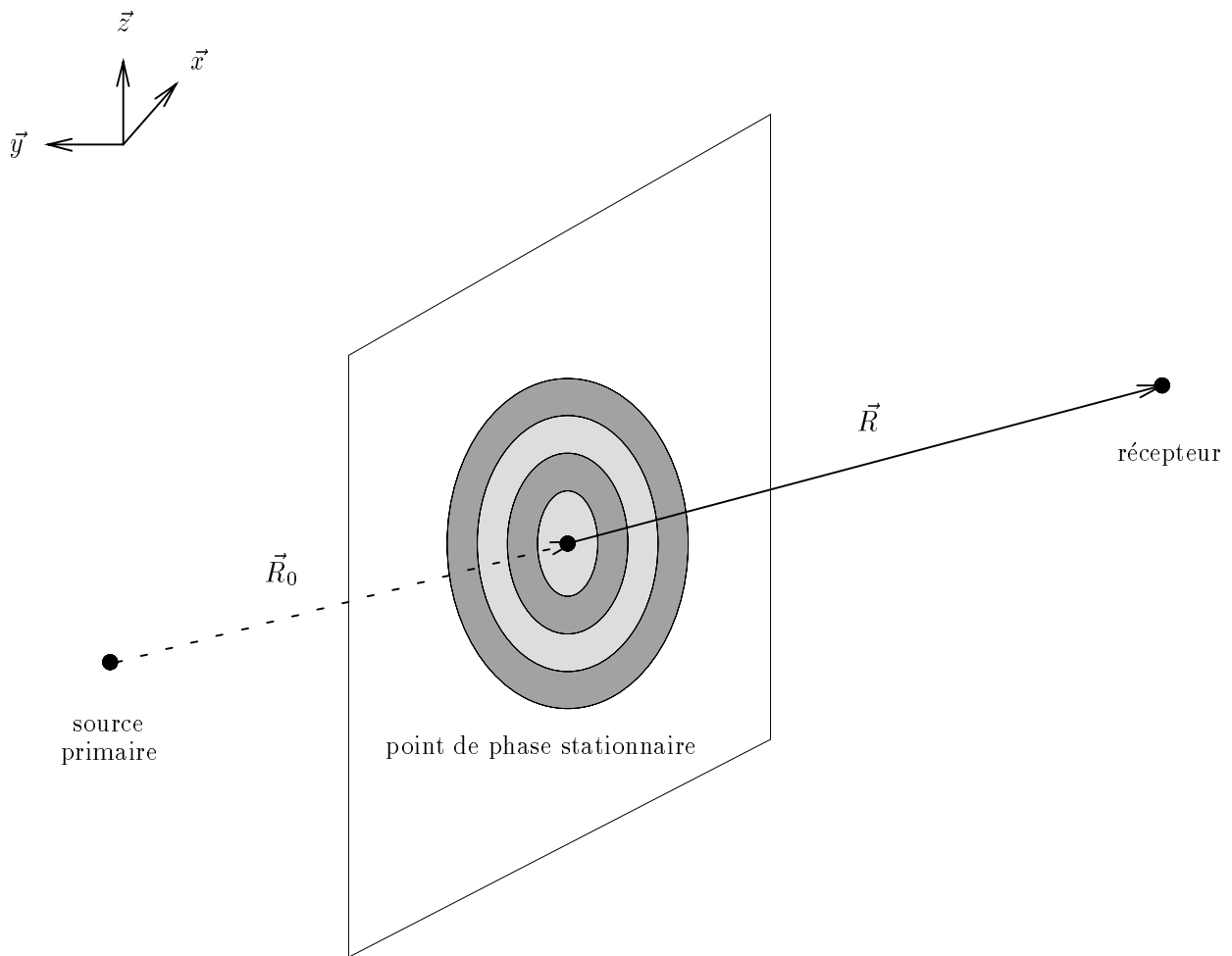


FIG. 5.19 - Zones de reconstruction de Huygens

un carré) étant à l'origine d'une onde diffractée identifiée par un front d'onde unique puisqu'il constitue une antenne linéaire de sources. De plus, on différencie bien les ondes émises par les côtés verticaux (côtés 1 et 3) de celles générées par les côtés horizontaux (côtés 2 et 4) qui sont parallèles à la ligne de réception (cf. Fig. 5.10).

D'autre part, en identifiant l'onde représentant le signal d'erreur à une distribution de sources, le modèle de Rubinowicz suggère un moyen pour *corriger l'erreur de troncature*: il suffit de disposer sur le pourtour du réseau de sources secondaires, des sources additionnelles, qui sont alimentées par des signaux définis par l'intégrale de Rubinowicz au lieu de l'intégrale de Kirchhoff et qui vont annuler l'onde diffractée résultant de la troncature à condition de les alimenter en opposition de phase.

En terme de correction de l'effet de troncature, le rôle de ces sources de Rubinowicz s'interprète de deux façons:

- elles annulent l'onde diffractée,
- elles se substituent aux sources absentes qui ont été éliminées par la troncature du réseau.

Cette seconde interprétation apporte un nouvel éclairage sur l'origine de l'onde diffractée, ainsi qu'au travail de reconstruction opéré par les sources secondaires dans leur ensemble. On se rend compte que la synthèse de l'onde primaire en un point est assurée pour l'essentiel par une seule des sources secondaires, à savoir la source située au point de phase stationnaire en vertu du Théorème de la Phase Stationnaire (cf. Annexe D).

Toutes les autres sources secondaires ne travaillent qu'à annuler l'onde diffractée de façon à restaurer l'onde primaire. Plus exactement, si on décompose le réseau de sources secondaires en cercles concentriques de rayons croissants et centrés sur le point de phase stationnaire, ces cercles définissant des *zones de construction de Huygens* (cf. Fig. 5.19), il apparaît que, si l'on ajoute une à une les contributions de chaque cercle dans l'ordre des rayons croissants, chaque cercle annule l'onde diffractée due au cercle précédent, tout en générant une nouvelle onde diffractée qui vient se superposer à l'onde primaire avec un retard croissant et une amplitude décroissante [Skudrzyk, 1971]. L'onde diffractée résultant de la troncature du réseau est ainsi repoussée de proche en proche jusqu'à ce qu'elle devienne négligeable par rapport à l'onde primaire. Par suite, les sources de Rubinowicz constituent un cas particulier de sources secondaires qui annulent l'onde diffractée sans générer de nouvelles ondes diffractées, parce que leur amplitude prend en compte les contributions de toutes les sources secondaires qui complèteraient le réseau de sources secondaires.

Contour de la fenêtre de diffraction virtuelle

Avant de conclure sur l'intégrale de Rubinowicz, quelques commentaires s'imposent quant à la détermination du contour sur lequel est appliquée l'intégrale de Rubinowicz. Tant que le réseau de sources secondaires est une distribution *continue*, son contour est défini sans ambiguïté. Cependant, en pratique, qu'il s'agisse de simulations numériques ou d'un réseau réel de sources secondaires, la distribution de sources secondaires est *discrète*. Or, lorsqu'on cherche à définir le contour d'un réseau discret, plusieurs solutions, qui sont illustrées sur la figure 5.20, sont possibles.

Un raisonnement simple permet de lever l'ambiguïté. Le réseau de sources secondaires étant la traduction physique de l'intégrale de Kirchhoff, un réseau discret correspond à une intégrale discrète. Par suite, le réseau détermine un maillage de la surface $\partial\Omega_0$, dans lequel on peut associer à chaque source secondaire, un élément de surface dont la source figure le centre. La réunion de tous ces éléments de surface forme une surface dont le contour est alors parfaitement défini (cf. Fig. 5.21) et sur lequel il convient d'appliquer l'intégrale de Rubinowicz⁴.

5.1.5 Influence de la troncature sur le champ restitué

Dès lors que la troncature du réseau est identifiée à un phénomène de diffraction, l'erreur de reconstruction résultant de la troncature s'interprète directement comme une onde diffractée qui vient se superposer à l'onde primaire. Cette onde diffractée, dans son évolution spatiale et temporelle, est déterminée par la géométrie du contour du réseau de sources secondaires. Par exemple, on a observé que la structure complexe de l'onde diffractée obtenue dans le cas d'un réseau carré (cf. Fig. 5.16) peut être décomposée en 4 ondes diffractées élémentaires (cf. Fig. 5.18), chacune d'elle étant associée à l'un des côtés du contour.

Par suite, l'influence de la troncature sur le champ restitué se traduit par la superposition à l'onde primaire d'une combinaison d'ondes diffractées dont les temps d'arrivée et les amplitudes dépendent uniquement de la géométrie du contour du réseau de sources secondaires. L'intégrale de Rubinowicz (cf. Equ. 5.26) montre que, par rapport à l'onde primaire, l'onde diffractée subit un retard τ et une atténuation a définis par, si R_0 désigne la distance directe entre la source primaire et le point récepteur :

$$\begin{cases} \tau &= \frac{R + \rho - R_0}{c} \\ a &= \frac{R_0}{R\rho} \end{cases}$$

Ainsi, agrandir la taille du réseau revient à augmenter la valeur du retard et de l'atténuation apportée à l'onde diffractée par rapport à l'onde primaire, ce qui réduit les perturbations engendrées.

4. Ce résultat mérite d'être précisé en portant le problème dans une problématique plus générale d'intégration numérique. La numérisation "brutale" de l'intégrale de Kirchhoff qui consiste à lui substituer une somme discrète, revient en effet à appliquer implicitement la méthode des rectangles. Or, on se rend compte qu'avec cette méthode d'intégration, les bornes d'intégration sont "floues", puisque deux contours différents conduisent à la même formule d'intégration. Aussi est-il délicat de justifier mathématiquement le choix d'un contour particulier, néanmoins le raisonnement exposé plus haut résout le problème de façon élégante. Il est d'ailleurs corroboré par les résultats de simulations numériques, ce qui tend à prouver que c'est la formule du point milieu qui intervient implicitement. Enfin, il convient de remarquer qu'avec des méthodes d'intégration plus sophistiquées, telles que la méthode des trapèzes ou la méthode de Simpson, cette incertitude sur les bornes d'intégration est levée, dans la mesure où la formule d'intégration distingue les sources réparties sur le pourtour du réseau, en lui affectant un poids plus faible, ce qui revient à appliquer au réseau une fenêtre de pondération spatiale.

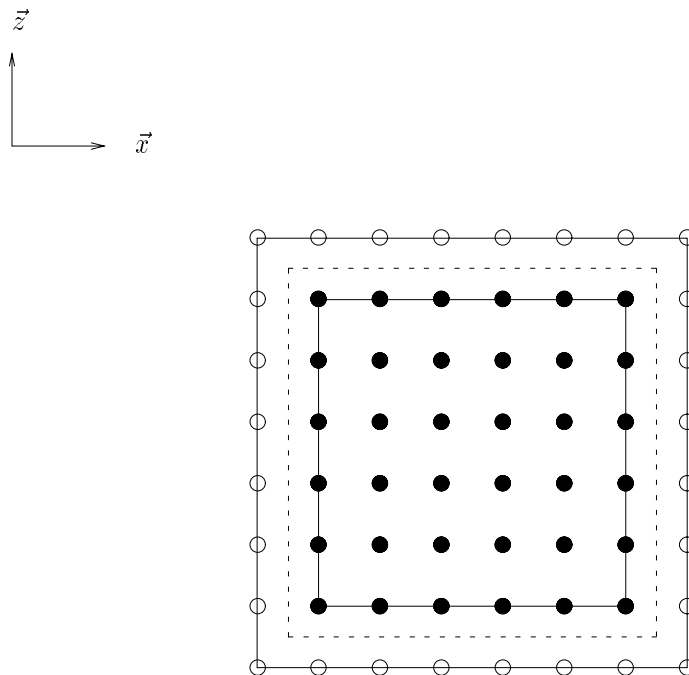


FIG. 5.20 - Détermination du contour d'un réseau discret de sources secondaires: Proposition de trois contours possibles

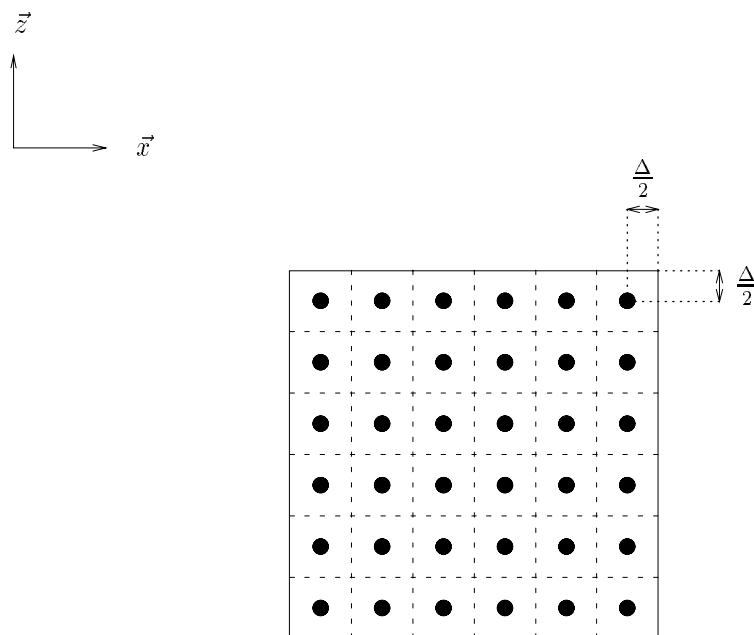


FIG. 5.21 - Maillage associé au réseau discret de sources secondaires: Mise en évidence du contour virtuel du réseau

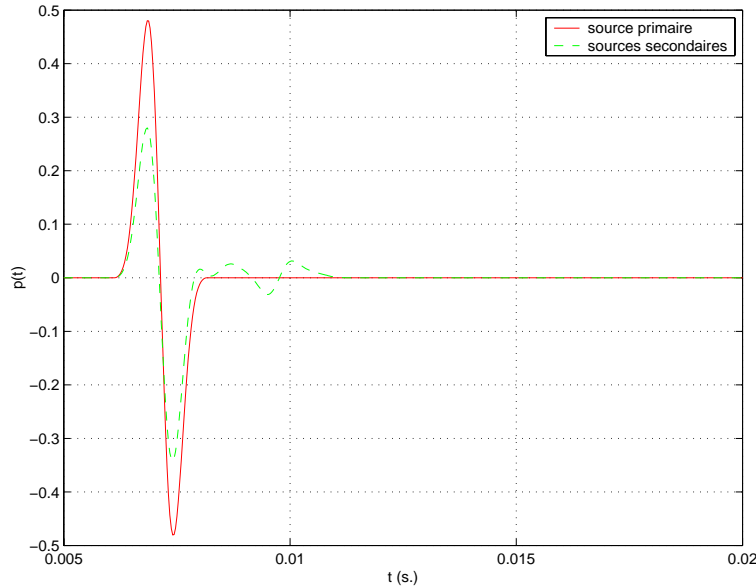


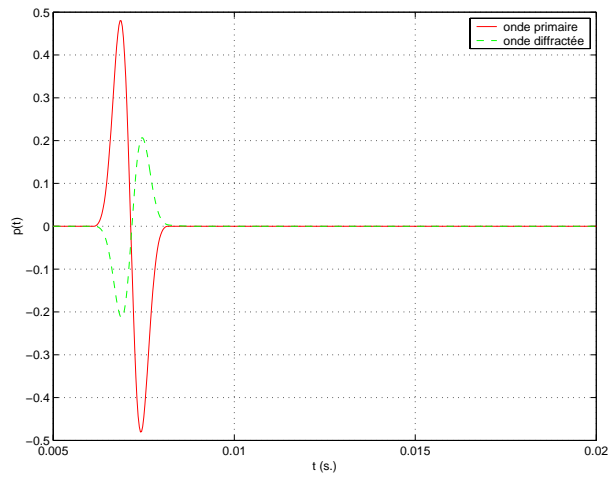
FIG. 5.22 - Onde primaire (trait continu) et onde reconstruite (trait pointillé): L'onde reconstruite est altérée par les ondes diffractées résultant de la troncature (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)

Il est intéressant d'analyser l'influence de l'onde diffractée *en fonction de la valeur de son retard* (cf. Fig. 5.22 & 5.23). Pour de très faibles retards, principalement dans le cas de petits réseaux de sources secondaires ou pour des positions excentrées de récepteurs situés au voisinage de la frontière entre zone éclairée et zone ombrée, l'onde diffractée chevauche la fin de l'onde primaire, de telle sorte qu'elle l'annule partiellement (cf. Fig. 5.23-a). Le principal effet observé est alors une atténuation de l'onde primaire (cf. Fig. 5.24). Ce phénomène dépend non seulement de la valeur du retard de l'onde diffractée, mais aussi de la longueur d'onde du champ acoustique reproduit: pour les grandes longueurs d'onde, il se produit quasiment systématiquement, alors que pour les petites longueurs d'onde, il disparaît quand le retard augmente (cf. Fig. 5.23-c & 5.25). Ces résultats dénotent la dépendance fréquentielle du phénomène.

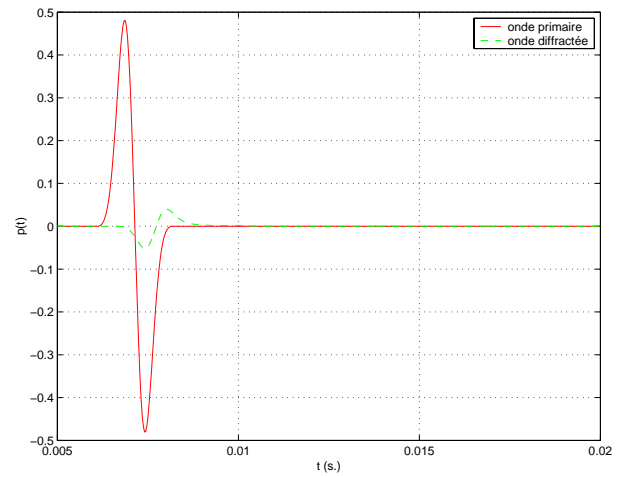
Lorsque le retard entre l'onde directe et l'onde diffractée est suffisamment important pour que les supports temporels des deux ondes se dissocient parfaitement (cf. Fig. 5.23-c par exemple), la présence de l'onde diffractée se traduit par un *filtrage en peigne* du spectre restitué. Ce phénomène s'observe aussi en acoustique des salles pour les premières réflexions qui accompagnent l'onde directe perçue. Il induit sur le plan perceptif, une coloration spectrale du champ perçu. Cependant, dans notre cas, on observe que l'amplitude de l'onde diffractée est très atténuée par rapport à l'onde primaire, ce qui minimise l'effet de filtrage en peigne.

Par ailleurs, comme notre étude se situe dans le cadre d'un système de restitution sonore spatialisée, un autre effet perceptif potentiel concerne les erreurs de localisation des sources sonores, sur la base de l'*effet de sommation* utilisé en stéréophonie. L'onde primaire et l'onde diffractée constituent en effet deux ondes décalées dans le temps qui, en vertu de l'effet de sommation, peuvent être perçues comme une seule onde issue d'une source unique située à mi-chemin de la source primaire et de la source de Rubinowicz associée à l'onde diffractée. Dans notre cas cependant, on peut supposer que cet effet reste marginal, dans la mesure où, en général, le champ diffracté ne se compose pas d'une seule onde, mais de plusieurs ondes, qui proviennent de surcroît de directions réparties de part et d'autre de la source primaire. Une localisation floue des sources restituées, qui peut éventuellement se traduire par un sentiment de gêne des auditeurs, serait donc plutôt l'effet à craindre.

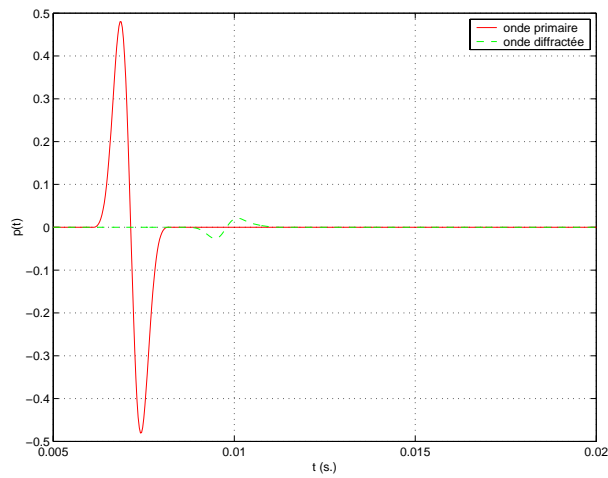
Enfin, lorsque le retard entre l'onde primaire et l'onde diffractée devient très important, un phénomène d'écho peut être perçu. Cependant, une telle situation ne se présente que pour des réseaux de sources secondaires de très grande taille, de telle sorte que le décalage temporel τ atteigne ou dépasse la valeur du seuil de perception de l'écho, qui est de l'ordre de 50 ms. Il faudrait considérer des réseaux dont les dimensions



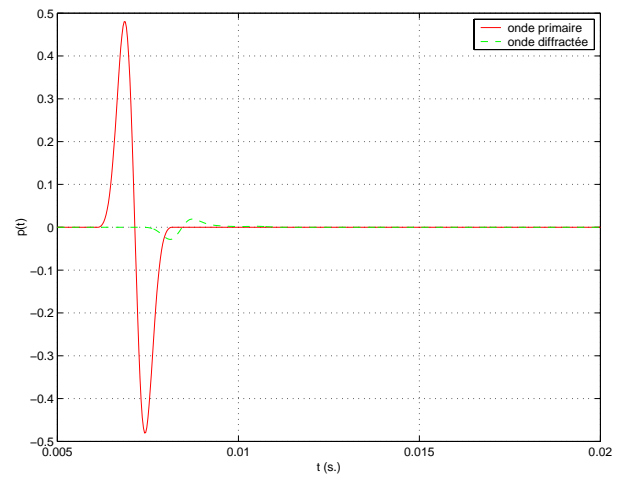
(a) Côté 1



(b) Côté 2



(c) Côté 3



(d) Côté 4

FIG. 5.23 - Onde primaire (trait continu) et ondes diffractées (trait pointillé) par le contour du réseau de sources secondaires: Visualisation des ondes diffractées associées aux différents côtés du carré constituant le contour du réseau — cf. Fig. 5.17 — (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)

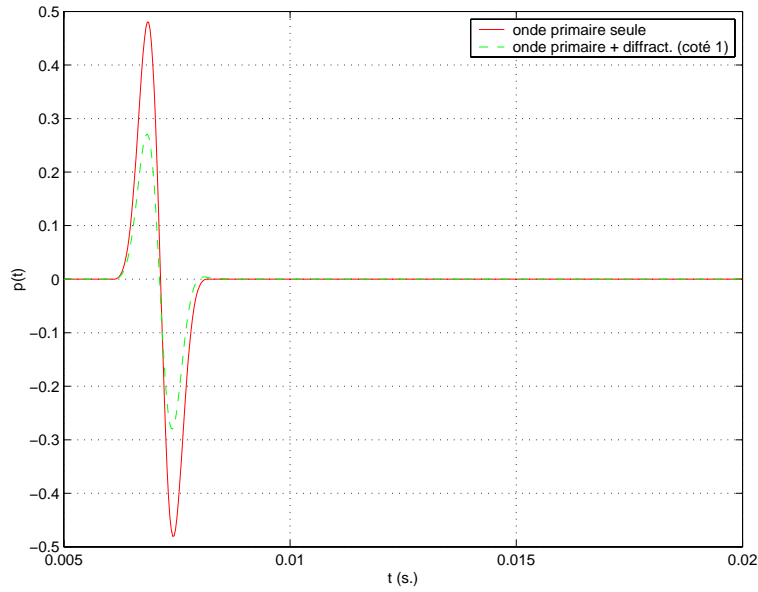


FIG. 5.24 - Interférence destructive entre l'onde primaire et l'onde diffractée émise par le côté 1 du contour — cf. Fig. 5.17 — (le trait continu et le trait pointillé représentent respectivement l'onde primaire seule et l'onde primaire sommée à l'onde diffractée): L'effet global est une atténuation de l'onde primaire (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)

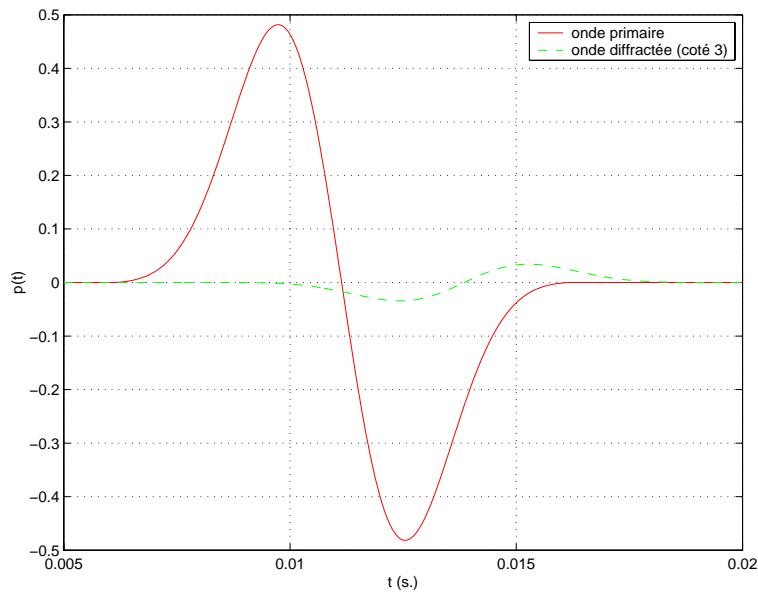


FIG. 5.25 - Onde primaire (trait continu) et onde diffractée (trait pointillé) par le côté 3 du contour — cf. Fig. 5.17 — à la fréquence de 100Hz: Les deux ondes se chevauchent partiellement alors qu'elles étaient dissociées pour $f = 500$ Hz (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)

sont de l'ordre d'une ou plusieurs dizaines de mètres, ce qui n'est pas envisagé dans notre contexte. En outre, avec des réseaux de cette taille, l'onde diffractée est très atténuée, ce qui réduit d'autant le risque d'écho.

Cette étude qualitative de l'effet de troncature sur le champ restitué mérite d'être complétée, avant de chercher à le corriger, par une analyse quantitative du phénomène afin d'évaluer à quel degré il perturbe le processus de reconstruction et par suite de déterminer les situations où il peut être négligé et celles où il importe de le corriger. De même, il convient d'étudier l'incidence perceptive de la troncature du réseau de sources secondaires, notamment en terme de coloration spectrale et de localisation des sources. Une analyse quantitative du phénomène de troncature constitue donc la prochaine étape.

5.2 Quantification de l'effet de troncature

5.2.1 Critère d'erreur de troncature

On a défini l'erreur de troncature p_{tronc} comme la différence entre l'onde de pression synthétisée par les sources secondaires et l'onde primaire originale (cf. Equ. 5.24). Pour déterminer à quel degré cette erreur perturbe la reconstruction de l'onde primaire, il convient de rapporter son amplitude à celle de l'onde primaire. Par suite, on se donne comme critère d'erreur, l'équivalent d'un "rapport bruit à signal", qui évalue le rapport entre l'énergie du signal d'erreur de troncature E_{tronc} et l'énergie de l'onde primaire E_{pre} [Pernaux, 1999]:

$$e_{tronc}(\vec{r}) = \frac{E_{tronc}(\vec{r})}{E_{pre}(\vec{r})} \quad (5.27)$$

où l'énergie des différents signaux est donnée par:

$$E_i(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |p_i(\vec{r}, t)|^2 dt \quad \text{avec } i = pri, tronc$$

Ce rapport est exprimé en dB:

$$E_{tronc}(\vec{r}) = 10 \log_{10} \left[\frac{E_{tronc}(\vec{r})}{E_{pre}(\vec{r})} \right] \quad (5.28)$$

C'est ce critère que nous utiliserons pour quantifier l'effet de troncature, il nous servira également à comparer l'efficacité des différentes méthodes de réduction de la troncature (cf. Section 5.3). On note qu'il est donné pour une position de récepteur \vec{r} . Dans un souci de concision et pour une meilleure lisibilité des résultats, on a choisi de l'évaluer pour un ensemble de positions réparties à l'intérieur de la zone d'écoute (cf. Fig. 5.26) et de calculer la moyenne de toutes les valeurs ainsi obtenues, de façon à exprimer un critère d'erreur moyen \bar{E}_{tronc} représentatif de la zone d'écoute:

$$\bar{E}_{tronc} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{tronc}(\vec{r}_i) \quad (5.29)$$

où les vecteurs \vec{r}_i pour $i = [1, 2, \dots, N]$ représentent les N positions de récepteurs sélectionnés sur la zone d'écoute.

5.2.2 Cas d'un réseau rectiligne de sources secondaires: Notions de troncature verticale et de troncature horizontale

Au cours de la section précédente, on a montré comment le réseau de sources secondaires, initialement représenté par une surface fermée $\partial\Omega_0$, peut être ramené à un réseau vertical plan formant un carré ou plus généralement un rectangle, dès lors que les sources à reproduire sont cantonnées dans un demi-espace. Dans un grand nombre d'applications et en particulier dans le cas d'un système de visioconférence, on peut supposer de plus que les sources primaires et les auditeurs sont situés dans le même plan horizontal. Sous cette hypothèse, le réseau rectangulaire se réduit à un segment de droite correspondant à l'intersection du

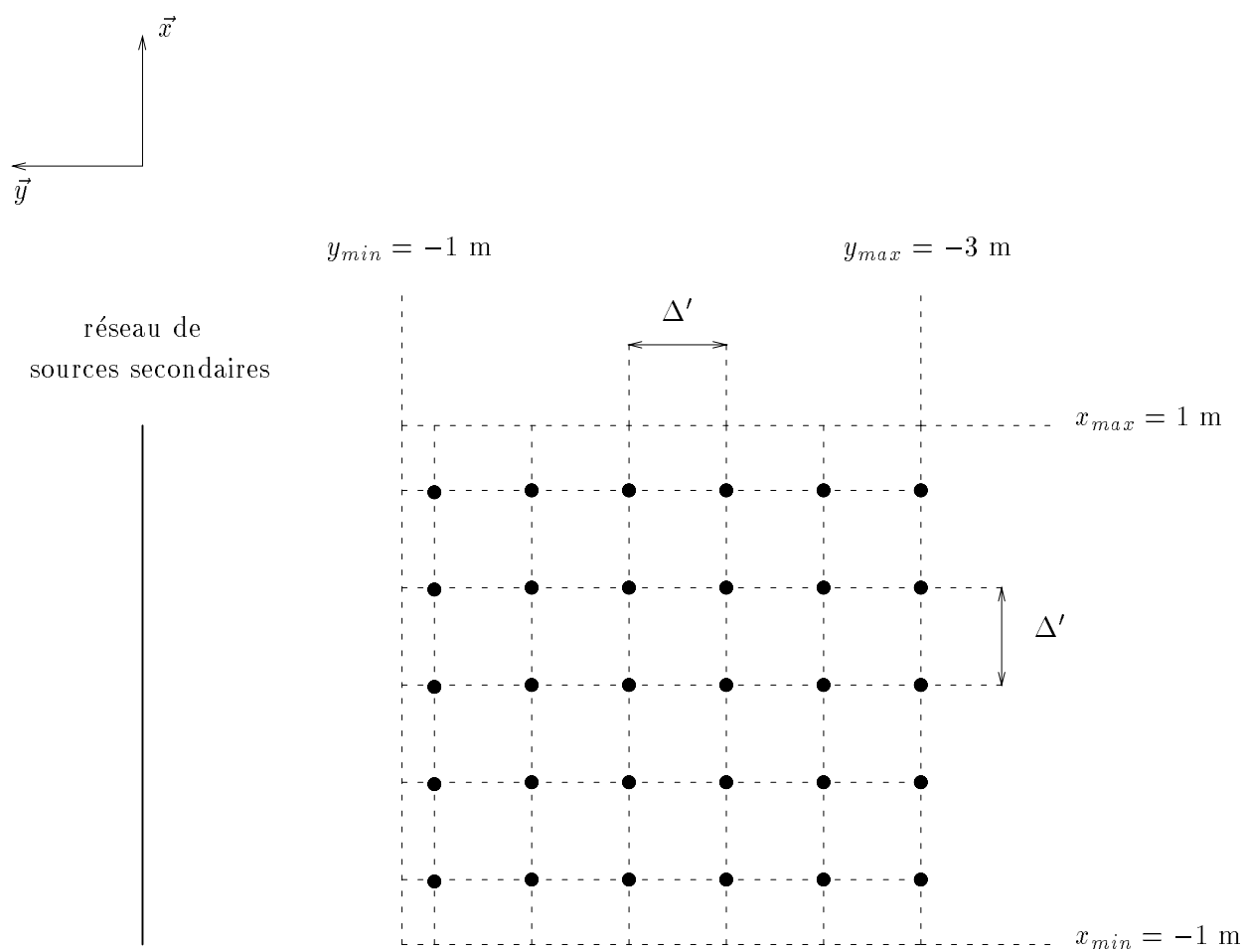


FIG. 5.26 - Positions des récepteurs sélectionnés pour l'évaluation du critère d'erreur moyenne de troncature dans le plan horizontal $z = 0$ ($\Delta' = 0.35 \text{ m}$)

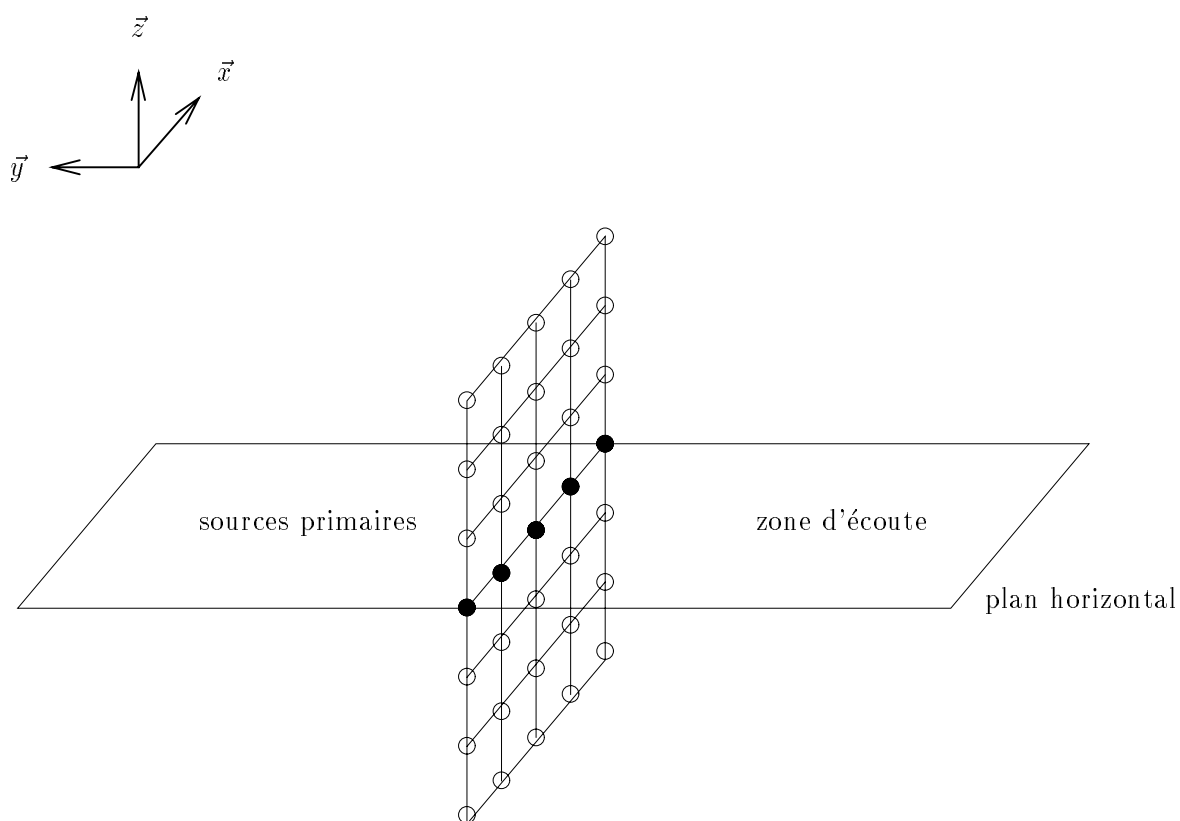


FIG. 5.27 - Restitution restreinte à un plan horizontal: Le réseau de sources secondaires se réduit à une ligne

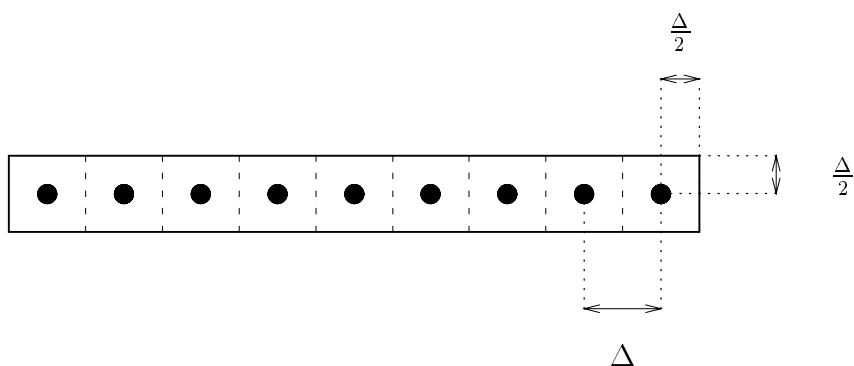


FIG. 5.28 - Contour du réseau rectiligne de sources secondaires pour le calcul de l'onde diffractée

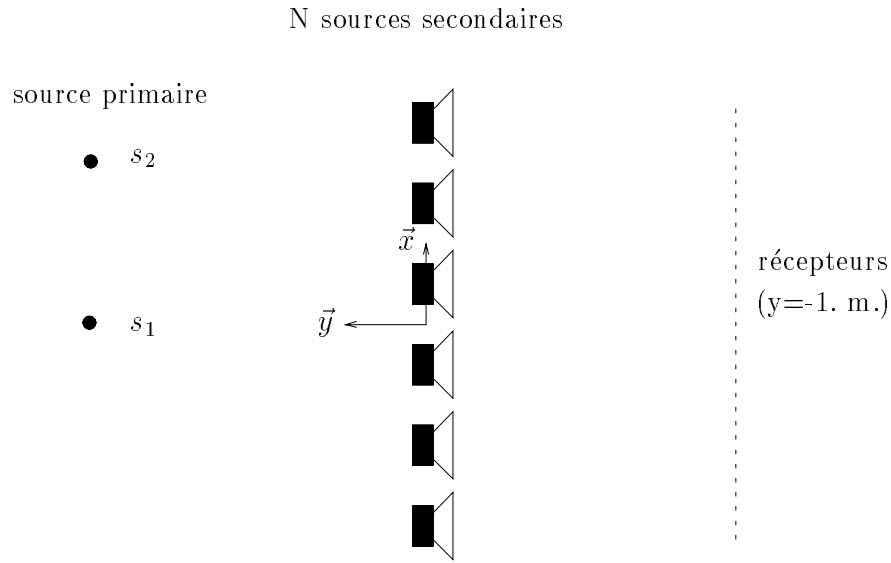


FIG. 5.29 - Troncature dans le cas d'un réseau 1D: Configuration de la source primaire, des sources secondaires et des récepteurs (récepteurs en $y = -1$ m., sources primaires en $s_1[0., 1., 0.]$ et $s_2[0.75, 1., 0.]$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Annexes E & F)

réseau de sources et du plan d'écoute (cf. Fig. 5.27), conformément à l'approximation de la phase stationnaire (cf. Section. 3.4.1). Désormais, on va se placer dans cette hypothèse et on considère donc un *réseau rectiligne de sources secondaires*.

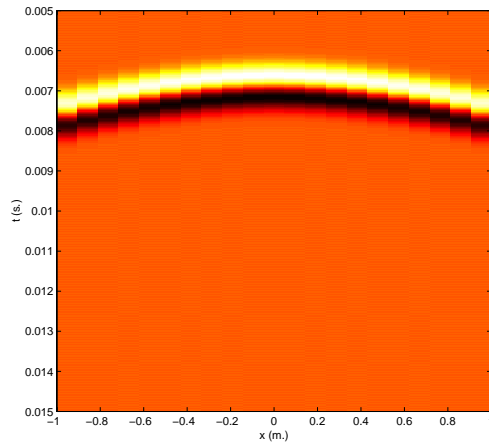
D'après ce qui précède, le signal d'erreur résultant de la troncature du réseau peut être analysé comme un champ diffracté, dans lequel on est capable d'identifier les ondes diffractées par les différents côtés du contour rectangulaire (cf. Fig. 5.18). Il est ainsi possible de dissocier dans le signal d'erreur (cf. Fig. 5.28):

- les ondes diffractées par les bords horizontaux du contour, qui sont associées au phénomène de *troncature verticale*,
- et les ondes diffractées par les bords verticaux du contour, qui sont associées au phénomène de *troncature horizontale*.

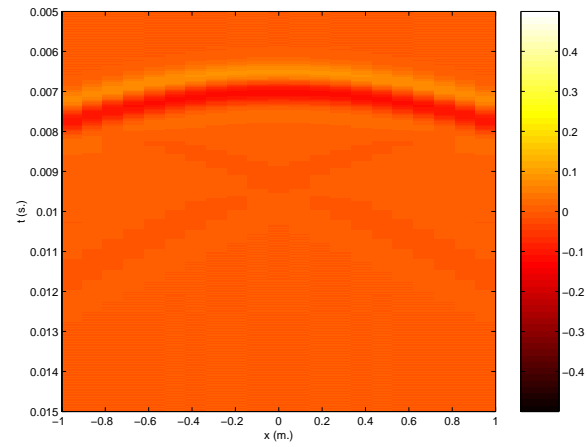
Cependant, cette distinction est arbitraire: elle n'est utile que dans la mesure où, lorsque l'on va chercher à réduire l'effet de troncature, on va pouvoir appliquer des méthodes de correction différente aux deux phénomènes.

5.2.3 Troncature verticale vs Troncature horizontale: Quantification de leurs effets

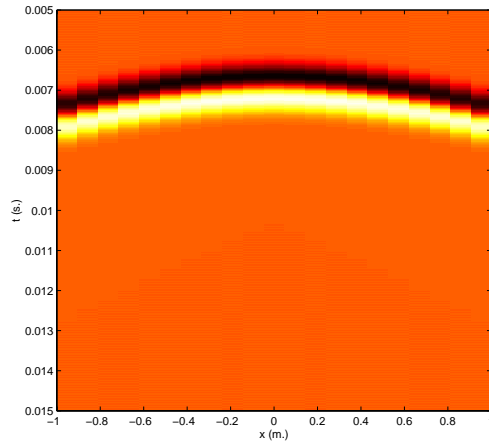
Il est intéressant d'évaluer le poids relatif des ondes diffractées provenant de la troncature verticale et de la troncature horizontale. On pressent que, dans le cas d'un réseau rectiligne, l'effet de la troncature verticale est prédominant. Les figures 5.30 et 5.31 reproduisent l'onde synthétisée par un réseau rectiligne dont la longueur totale mesure 2 mètres (cf. Fig. 5.29). Deux positions de source primaire ont été considérées: l'une est centrée par rapport au réseau, l'autre est excentrée. On observe que l'onde reconstruite est très atténuée par rapport à l'onde primaire, cependant la forme de l'onde est correcte. Cette atténuation est une conséquence de la troncature du réseau de sources secondaires et l'examen des ondes diffractées associées à la troncature verticale et horizontale (cf. Fig. 5.30c-d & 5.31c-d) montre que seule l'onde diffractée résultant de la troncature verticale en est responsable. Cette dernière se superpose en effet en opposition de phase à l'onde directe et, comme elle présente une forte amplitude et un faible retard, elle l'annule presque complètement. En comparaison, l'onde diffractée résultant de la troncature horizontale est insignifiante. On note cependant



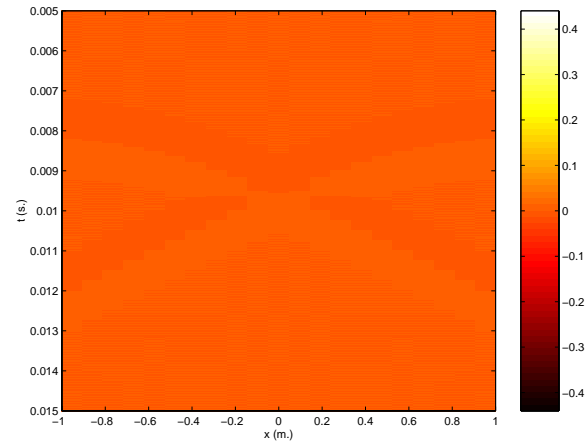
(a) Onde primaire



(b) Onde reconstruite

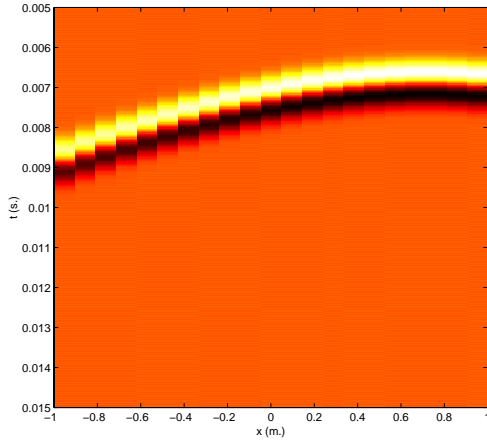


(c) Onde diffractée due à la troncature verticale

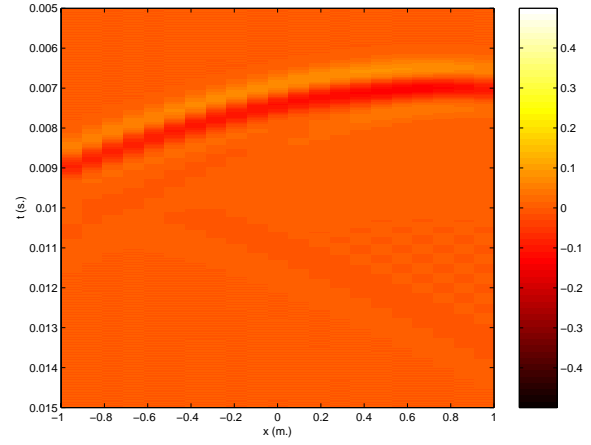


(d) Onde diffractée due à la troncature horizontale

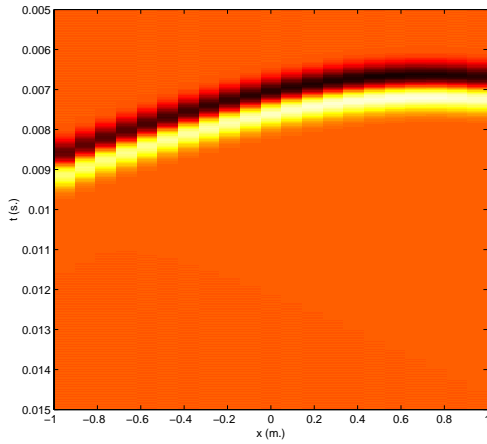
FIG. 5.30 - Troncature verticale et troncature horizontale: Source primaire centrée située en s_1 (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)



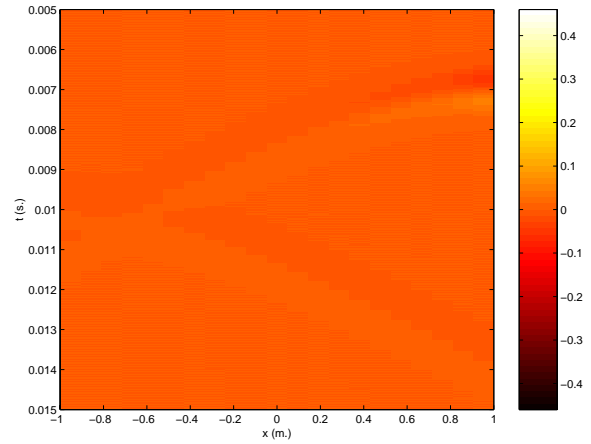
(a) Onde primaire



(b) Onde reconstruite



(c) Onde diffractée due à la troncature verticale



(d) Onde diffractée due à la troncature horizontale

FIG. 5.31 - Troncature verticale et troncature horizontale: Source primaire excentrée située en s_2 (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

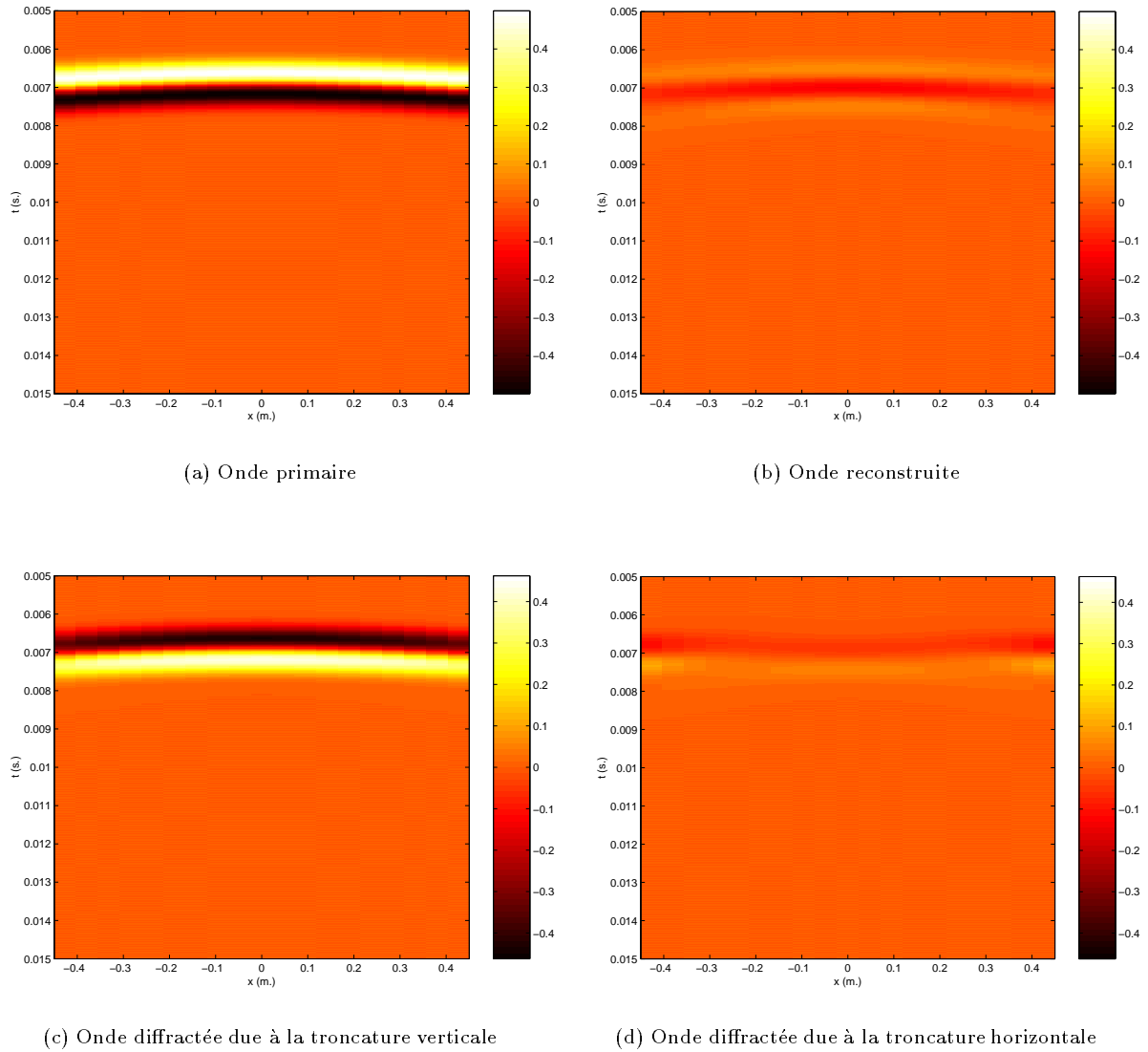


FIG. 5.32 - Troncature verticale et troncature horizontale: Réseau tronqué à $N = 6$ sources secondaires (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 6$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

que, si la source primaire est excentrée, l'onde diffractée horizontale issue de l'extrémité la plus proche de la source est légèrement renforcée (cf. Fig. 5.31-d). De la même façon, pour un réseau de faible longueur (cf. Fig. 5.32), l'effet de la troncature horizontale est plus marqué, même si la troncature verticale reste le phénomène prédominant. Il en ressort que l'élément majeur à traiter pour un réseau rectiligne est le problème de la troncature verticale.

Ce résultat est confirmé par l'évaluation du *critère d'erreur de troncature* E_{tronc} . Les figures 5.33, 5.34 et 5.35 reproduisent sa valeur moyenne et l'écart type associé pour l'ensemble des positions de récepteurs définis sur la figure 5.26. On considère les valeurs obtenues pour l'antenne de longueur $L = 2$ m pour les deux positions de sources primaires s_1 (Fig. 5.33) et s_2 (Fig. 5.34), ainsi que pour une antenne de petite taille $L = 0.5$ m (Fig. 5.35). On note d'abord que l'erreur de troncature totale atteint un niveau très proche de 0 dB, c'est-à-dire que l'onde diffractée totale possède un niveau comparable à celui de l'onde primaire. Quand on compare les contributions de la troncature verticale et de la troncature horizontale, les courbes montrent bien que l'essentiel de l'erreur de troncature provient de la troncature verticale, quelle que soit la fréquence. Pour la grande antenne ($L = 2$ m), l'erreur de troncature verticale est de l'ordre de 0 dB contre des valeurs comprises entre -30 et -35 dB pour la troncature horizontale. En d'autres termes, pour cette antenne, l'erreur de troncature provient quasi-exclusivement de la troncature verticale. Pour la petite antenne ($L = 0.5$ m), l'erreur de troncature horizontale se renforce légèrement pour atteindre -15 dB. L'erreur de troncature continue néanmoins d'être largement dominée par la troncature verticale.

5.2.4 Conclusion

Dans l'onde synthétisée par une antenne rectiligne de haut-parleurs, deux types de troncature interviennent: la troncature verticale et la troncature horizontale. On vient de voir que, dès que l'antenne atteint une longueur suffisante ($L > 1$ m), l'effet de la troncature horizontale est négligeable, de sorte que l'erreur de troncature est principalement gouvernée par les effets de la troncature verticale. Pour compléter cette étude, la prochaine étape consisterait à quantifier l'effet de troncature sur le plan perceptif au moyen de tests d'écoute. En particulier, il faudrait déterminer dans quelles situations et à quel degré l'effet de troncature est sensible. Par ailleurs, il conviendrait d'analyser les phénomènes perceptifs associés à l'effet de troncature, notamment s'il induit des colorations spectrales ou s'il influence la localisation des sources.

A présent, différentes approches de réduction de l'effet de troncature vont être présentées.

5.3 Solutions pour réduire l'effet de troncature

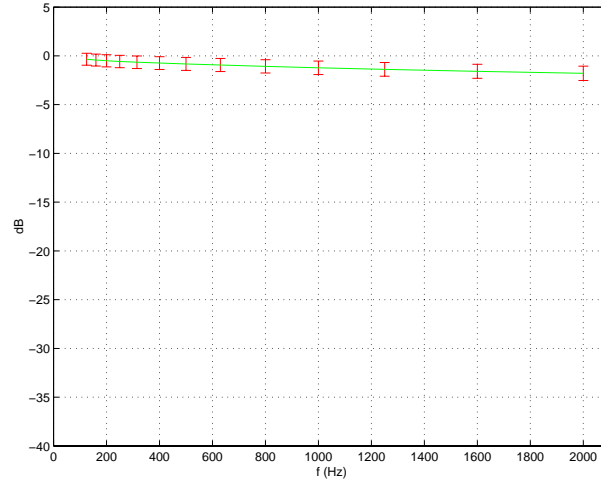
5.3.1 Annulation de l'onde diffractée par des sources de Rubinowicz [Pernaux, 1999]

Principe

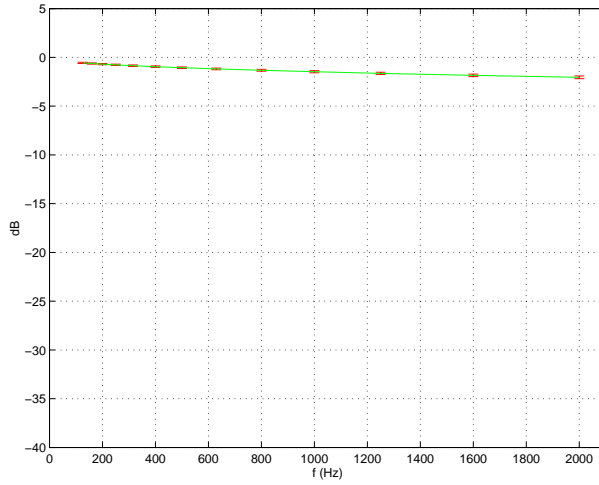
Une fois la troncature ramenée à un problème de diffraction, l'erreur de troncature s'exprime comme la superposition d'une onde diffractée à l'onde primaire originale. De plus, grâce à l'intégrale de Rubinowicz (Equ. 5.26), cette onde diffractée se décrit comme l'onde émise par une distribution de *sources virtuelles* réparties sur le bord du réseau de sources secondaires.

Par suite, on se propose de corriger l'effet de troncature en disposant en bordure du réseau des *sources réelles* dont les signaux d'alimentation sont définis à partir de l'intégrale de Rubinowicz de façon à annuler l'onde diffractée. En d'autres termes, au réseau de sources secondaires initial est associé un réseau additionnel correctif disposé à la périphérie du réseau principal et destiné à compenser l'effet de troncature. Toutefois, il faut noter que les sources de Rubinowicz ne sont capables d'annuler l'onde diffractée que dans la zone éclairée: dans la zone d'ombre, elles contribuent à le renforcer (cf. page 236), ce qui ne constitue pas un véritable problème, dans la mesure où corriger l'effet de troncature dans la zone non éclairée n'a pas de sens. Il est plus pertinent le réseau de sources secondaires afin d'élargir la zone d'écoute.

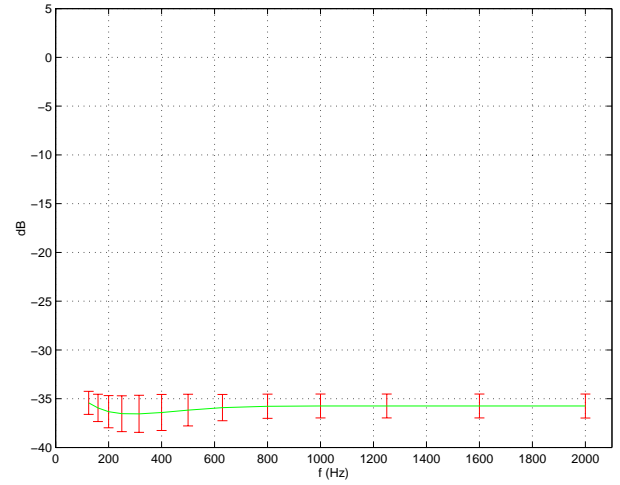
Cette approche présente l'inconvénient notable d'augmenter le nombre de sources impliquées dans le travail de reconstruction de l'onde acoustique: ainsi un réseau rectiligne de N sources secondaires requiert de l'ordre de $2 \times N$ sources correctives de Rubinowicz en sus. On rappelle cependant que le domaine de restitution n'englobe pas tout l'espace, mais a été restreint à un plan horizontal. Or, si la source primaire et le point



(a) Erreur totale

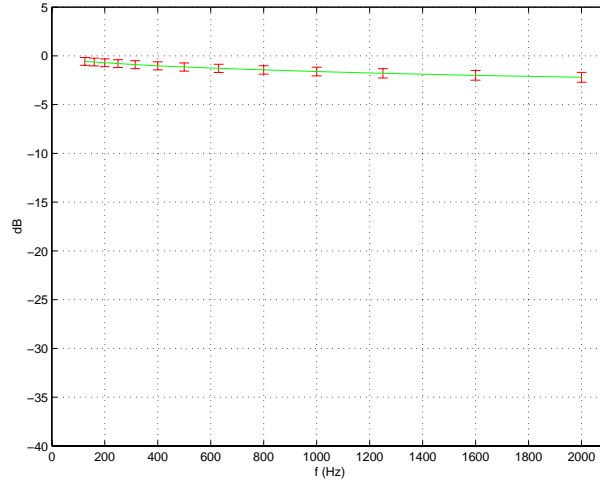


(b) Troncature verticale

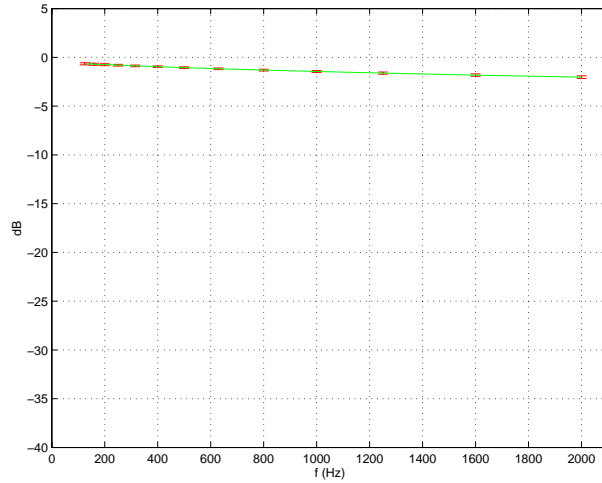


(c) Troncature horizontale

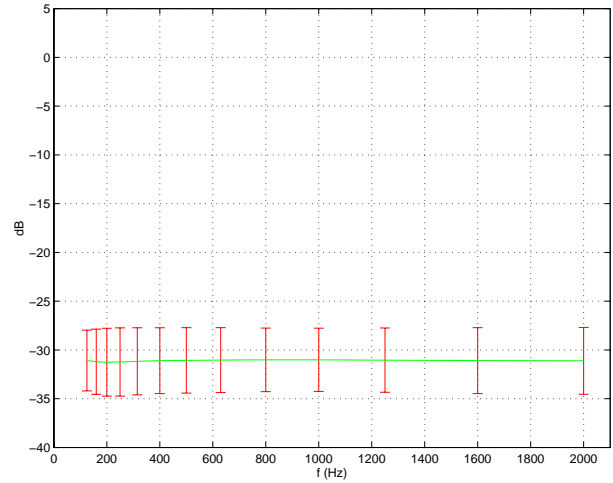
FIG. 5.33 - Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} en fonction de la fréquence (cf. Equ. 5.29) pour une source primaire centrée située en s_1 : Erreur totale, erreur résultant de la troncature verticale seule et erreur résultant de la troncature horizontale seule — la valeur de l'écart-type est représentée par des barres verticales — (source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)



(a) Erreur totale

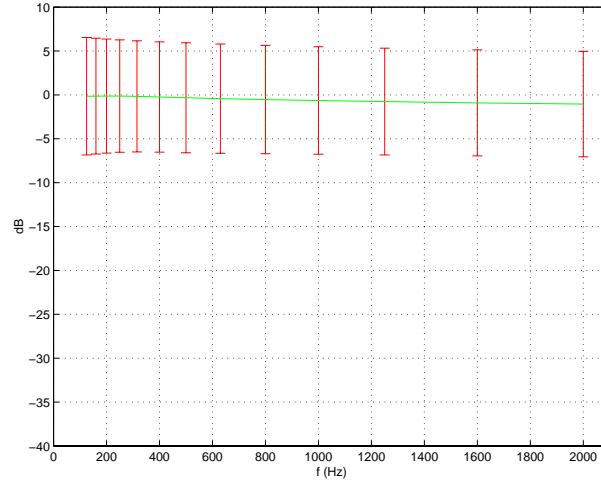


(b) Troncature verticale

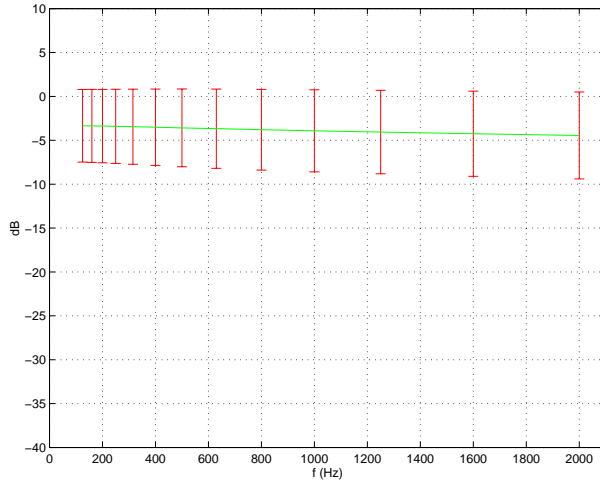


(c) Troncature horizontale

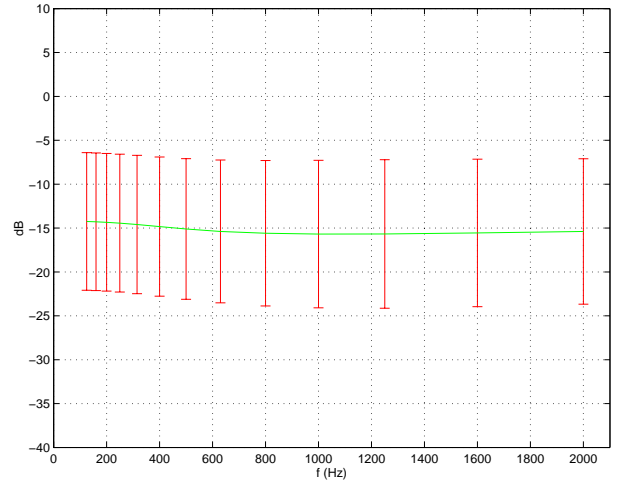
FIG. 5.34 - Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} en fonction de la fréquence (cf. Equ. 5.29) pour une source primaire centrée située en s_2 : Erreur totale, erreur résultant de la troncature verticale seule et erreur résultant de la troncature horizontale seule — la valeur de l'écart-type est représentée par des barres verticales — (source primaire en s_2 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)



(a) Erreur totale



(b) Troncature verticale



(c) Troncature horizontale

FIG. 5.35 - Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} en fonction de la fréquence (cf. Equ. 5.29) pour un réseau tronqué à $N = 6$ sources secondaires: Erreur totale, erreur résultant de la troncature verticale seule et erreur résultant de la troncature horizontale seule — la valeur de l'écart-type est représentée par des barres verticales — (source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 6$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)

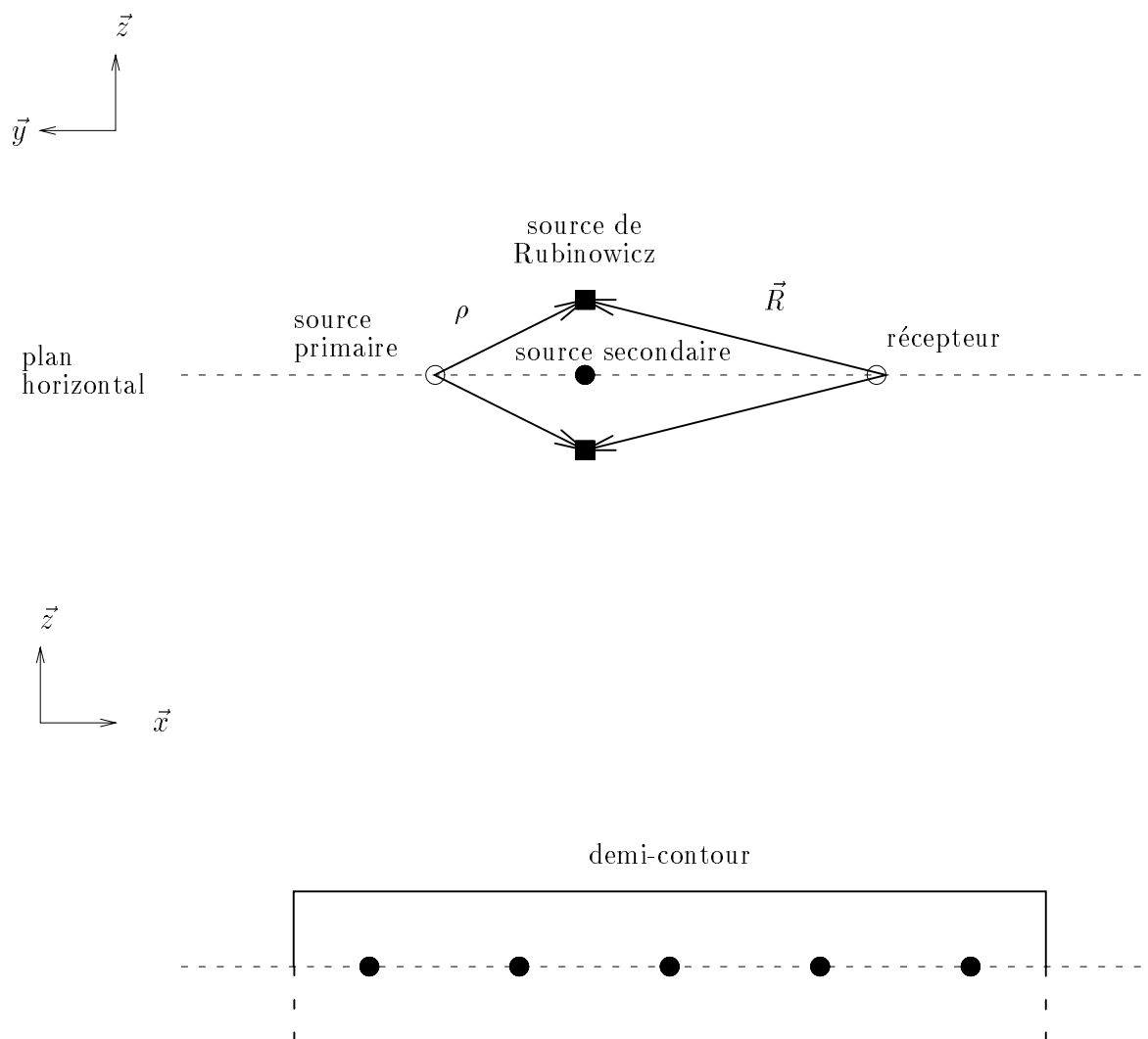


FIG. 5.36 - Symétrie verticale des sources de Rubinowicz: Le nombre de sources correctives peut être divisé par deux si la source primaire, les sources secondaires et le point récepteur appartiennent au même plan horizontal

récepteur appartiennent à ce plan, il apparaît, compte tenu des propriétés de symétrie de rayonnement des sources de Rubinowicz, que les sources de Rubinowicz symétriques par rapport au plan horizontal contribuent de façon identique à l'annulation de l'onde diffractée, de sorte que la correction de l'effet de troncature peut être assurée par des sources disposées sur une moitié du contour seulement, à condition de doubler leur amplitude⁵ (cf. Fig. 5.36). Par suite, un réseau rectiligne de N sources secondaires ne nécessite plus que de l'ordre de N sources de Rubinowicz additionnelles, ce qui correspond à un *doublent du nombre total de sources*.

Cependant, on constate que la correction obtenue avec un réseau de sources de Rubinowicz échantillonné avec un pas Δ égal à celui utilisé pour le réseau de sources secondaires n'est pas parfaite. Pour l'améliorer, il convient de suréchantillonner le réseau de sources de Rubinowicz, par exemple en divisant par deux le pas d'échantillonnage ($\frac{\Delta}{2}$), mais le nombre de sources correctives est doublé. La principale limitation à la méthode des sources de Rubinowicz réside donc dans le nombre de sources additionnelles qu'elle rajoute au réseau de sources secondaires. Dans ce qui suit, une solution à ce problème sera proposée avec le concept de *source de Rubinowicz virtuelle*.

Implémentation d'une source de Rubinowicz

Annuler l'onde diffractée par des sources de Rubinowicz est dans son principe très simple, mais la *réalisation pratique* d'une source de Rubinowicz constitue un problème assez délicat. En première approximation, une source de Rubinowicz (cf. Equ. 5.26) peut être assimilée à un *monopôle* et son amplitude correspond au signal de pression induit par la source primaire à sa position. Les sources de Rubinowicz doivent donc être reliées à des microphones de pression chargés d'enregistrer l'onde primaire sur le contour du réseau de sources secondaires. La source théorique de Rubinowicz comporte également un terme de directivité défini par (cf. Fig. 5.14):

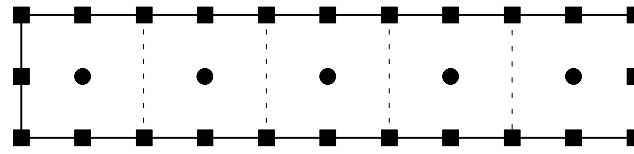
$$\eta_{Rubinowicz}(\vec{\rho}, \vec{R}) = \frac{\cos(\vec{R}, \vec{n}) \sin(\vec{\rho}, \vec{dl})}{1 + \cos(\vec{R}, \vec{\rho})} \quad (5.30)$$

cependant il implique une directivité irréalisable stricto sensu (cf. page 237): en premier lieu de part sa complexité qui s'écarte notablement des caractéristiques "classiques" de directivité de sources, mais surtout parce qu'elle mêle inextricablement les directivités des sources et des capteurs qui leur sont associés. Les comportements des sources et des capteurs ne peuvent être dissociés qu'à condition de considérer soit une source omnidirective associée à un capteur directif dont la directivité est assujettie à la position du récepteur, soit un capteur omnidirectif associé à une source directive dont la directivité est assujettie à la position de la source primaire.

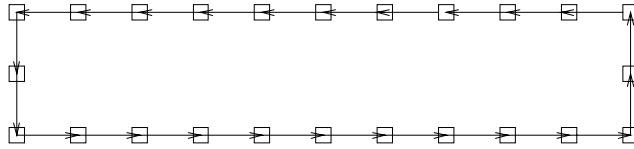
La seconde solution implique qu'on dispose d'une source électro-acoustique dont la directivité suit la loi décrite par l'équation 5.30, ce qui semble assez difficile. De plus, le fait que cette directivité soit assujettie à la position de la source primaire signifie qu'il faudrait orienter la source de Rubinowicz en fonction de la position de la source primaire et, par suite, la réorienter à chacun de ses mouvements. Il faudrait en outre autant de sources de Rubinowicz que de sources primaires. La première solution est plus séduisante, d'autant qu'avec le concept de source notionnelle, la prise de son est simulée: le terme de directivité est donc implémenté sur un capteur virtuel et non sur un transducteur réel. Il suffit d'ajouter dans le module de simulation de prise de son, un gain dont la valeur est définie en fonction de $\vec{\rho}$ et \vec{R} conformément à l'équation 5.30. Cependant, il reste la dépendance en fonction de la position d'écoute via le vecteur \vec{R} : elle implique d'appliquer un gain différent pour chaque position d'écoute, ce qui est impossible en pratique, dès lors que plusieurs auditeurs sont présents simultanément et qu'ils peuvent se déplacer au sein de la zone d'écoute⁶. Par suite, on est contraint d'appliquer une valeur unique de gain à chaque source de Rubinowicz. La solution la plus simple consiste à appliquer la valeur de gain correspondant à une position d'écoute unique, qui peut être définie comme le centre de la zone d'écoute. On remarque qu'alors le problème de la discontinuité du facteur directif de la source de Rubinowicz (cf. Equ. 5.30 & Page 5.1.4) ne se pose plus, puisque la configuration critique où il diverge est évitée si la position d'écoute *moyenne*, qui est utilisée pour le calcul des gains des sources

5. D'un point de vue physique, ce résultat traduit le fait que les ondes diffractées par les deux bords horizontaux du contour sont identiques, dès lors que la source primaire, les sources secondaires et le point récepteur sont situés dans le même plan horizontal.

6. Le problème a déjà été rencontré pour appliquer la correction de la Phase Stationnaire (cf. Sections 3.4.1 & 6.2.3).



(a) Position des sources de Rubinowicz



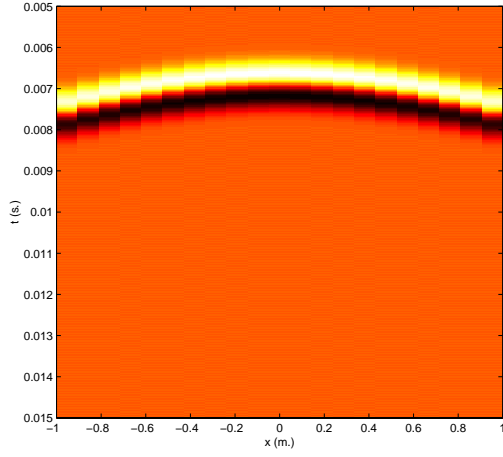
(b) Vecteurs de contour associés

FIG. 5.37 - Géométrie du réseau de sources de Rubinowicz : Contour 1 de référence (N.B.: les sources de Rubinowicz sont espacées de $\frac{\Delta}{2}$).

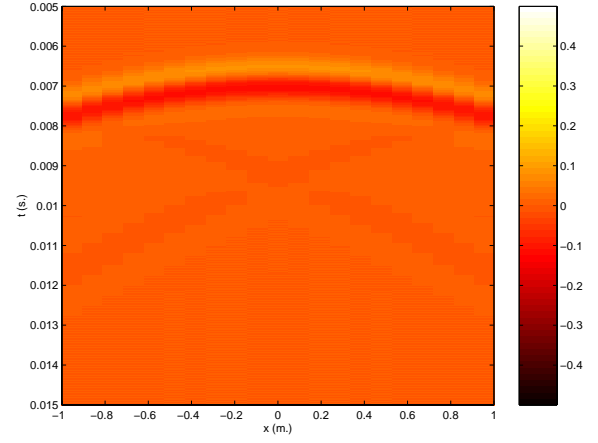
de Rubinowicz, est choisie au centre de la zone d'écoute. Par ailleurs, il serait intéressant d'étudier s'il n'est pas possible d'optimiser la correction de l'effet de troncature sur une zone d'écoute étendue en introduisant au niveau de chaque source de Rubinowicz un *filtre calculé par des techniques de filtrage inverse* [Kirkeby & Nelson, 1993] [Nelson, 1994] [Kirkeby *et al.*, 1996].

Les figures 5.38 et 5.39 illustrent comment l'effet de troncature (troncature verticale et horizontale) est corrigé par les sources de Rubinowicz pour deux positions de sources primaires, s_1 et s_2 . Le réseau de sources de Rubinowicz est représenté sur la figure 5.37. On note que l'espacement entre les sources de Rubinowicz vaut $\frac{\Delta}{2}$ et non Δ , comme pour les sources secondaires. On a reproduit l'onde synthétisée avec des sources de Rubinowicz idéales (*correction idéale*), c'est-à-dire dont le gain varie idéalement en fonction de la position d'écoute, et l'onde obtenue avec des sources de Rubinowicz dont le gain est calculé pour une position d'écoute unique (*correction moyenne*), en l'occurrence le point $\vec{r} = [0., -1., 0.]$. Avec les sources de Rubinowicz idéales, l'effet de troncature est parfaitement corrigé. En revanche, lorsque le gain appliqué est défini pour une position d'écoute moyenne, la correction n'est plus aussi performante. L'effet de troncature est bien compensé au niveau du point $\vec{r} = [0., -1., 0.]$ et des positions adjacentes, mais la correction devient de moins en moins efficace au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. Il faut cependant reconnaître que la correction de l'effet de troncature reste performante sur une zone qui s'étend à plusieurs dizaines de centimètres de part et d'autre du point de référence $\vec{r} = [0., -1., 0.]$. Bien que la dépendance en fonction de la position d'écoute ne soit pas prise en compte, la correction apportée par les sources de Rubinowicz reste donc efficace.

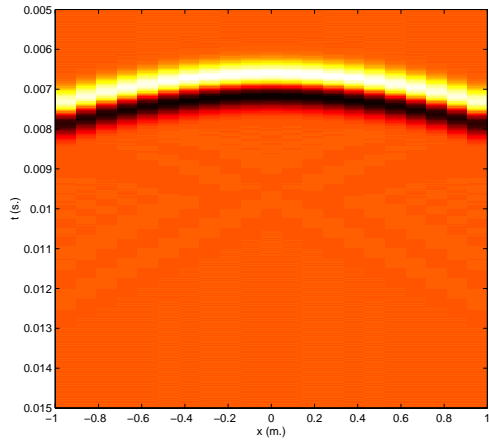
Les résultats précédents sont complétés par une évaluation de l'erreur de troncature \bar{E}_{tronc} résiduelle après correction et moyennée sur la zone d'écoute définie sur la figure 5.26. Les valeurs obtenues sont reproduites sur la figure 5.40 pour les deux positions de sources primaires, s_1 et s_2 . Avec les sources de Rubinowicz idéales, le niveau de l'erreur de troncature est ramené de 0 dB à -50 dB dans les basses fréquences, jusqu'à environ 500 Hz. Pour les fréquences supérieures, l'erreur de troncature augmente rapidement, d'une part en raison de l'effet de repliement spectral qui vient se superposer à l'effet de troncature dès qu'on se rapproche de la fréquence d'aliasing ($f_{al} = 1.7$ kHz). D'autre part, on va voir que les performances des sources de Rubinowicz sont sensibles à leur espacement, même si ce dernier vérifie le critère de Shannon. Le travail d'annulation de l'onde diffractée par les sources de Rubinowicz est, en effet, fortement amélioré si on suréchantillonne le réseau de sources de Rubinowicz avec un pas de $\frac{\Delta}{2}$ au lieu Δ qui serait la valeur imposée par la condition de Shannon. La correction des sources de Rubinowicz commence donc à se détériorer bien en dessous de la fréquence d'aliasing f_{al} . Avec la correction moyenne, l'erreur de troncature est ramenée de 0 dB à -20 dB seulement. Même si elle n'est pas à la hauteur des sources idéales, une telle réduction reste malgré



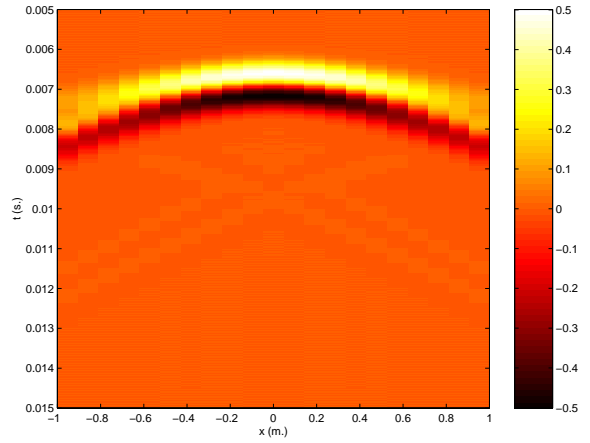
(a) Onde primaire



(b) Sources secondaires sans correction



(c) Sources secondaires avec correction: sources de Rubinowicz avec un gain idéal



(d) Sources secondaires avec correction: sources de Rubinowicz avec un gain calculé pour une position moyenne d'écoute

FIG. 5.38 - Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz (source primaire en s_1): Correction idéale et correction approchée définie pour une position moyenne d'écoute (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

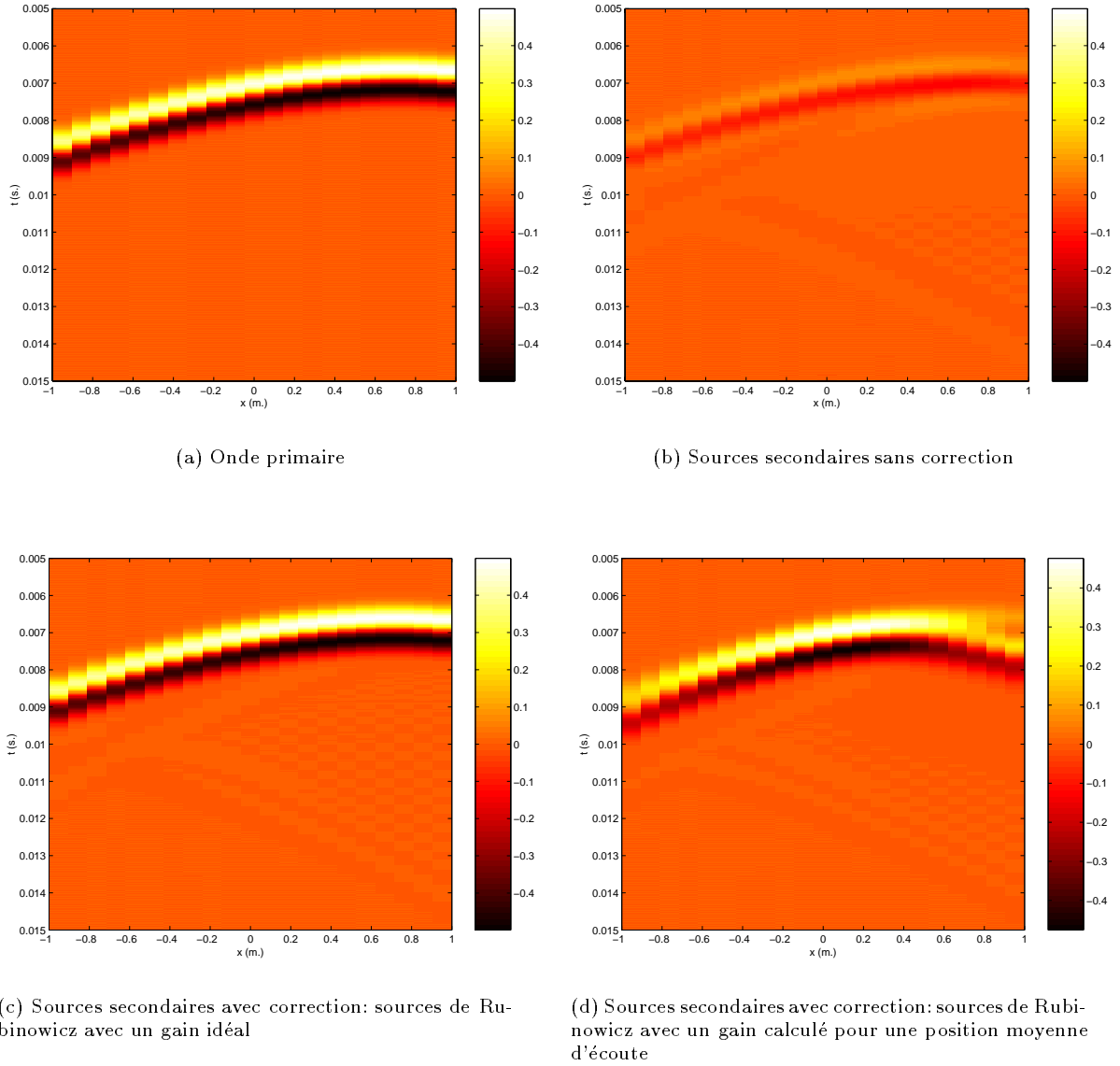


FIG. 5.39 - Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz (source primaire en s_2): Correction idéale et correction approchée définie pour une position moyenne d'écoute (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_2 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

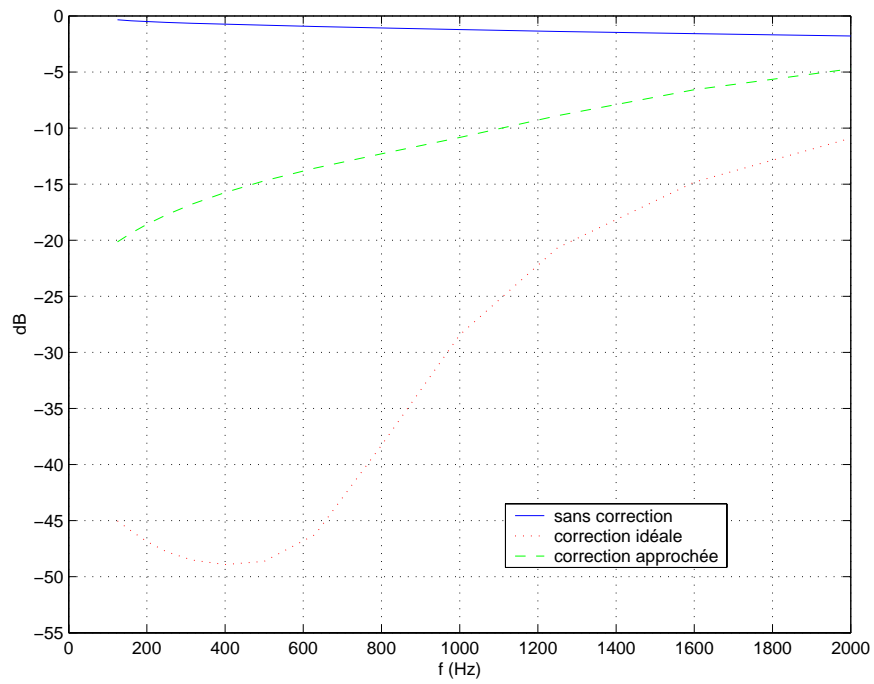
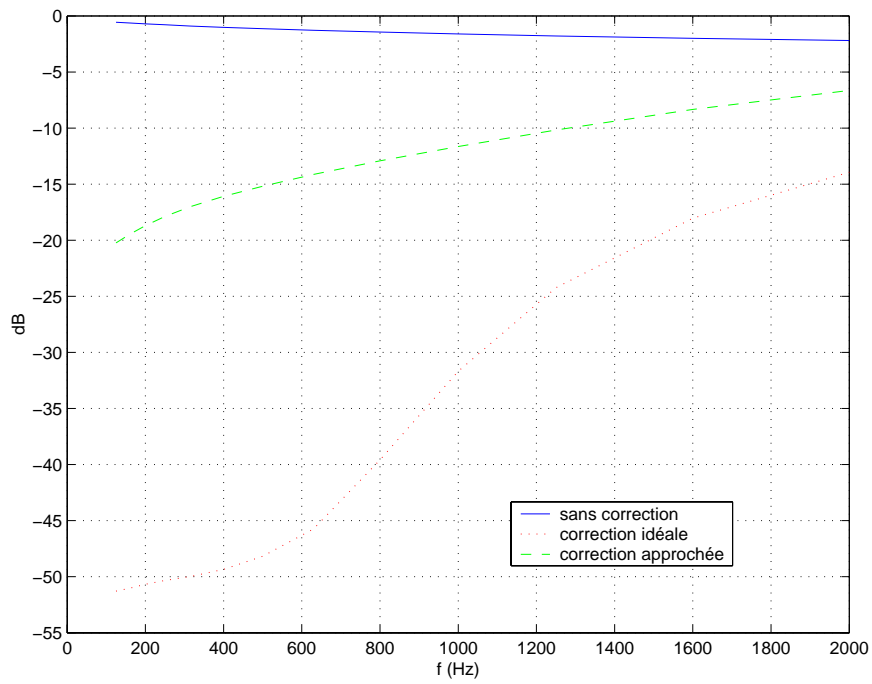
(a) Source primaire en s_1 (b) Source primaire en s_2

FIG. 5.40 - Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz: Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} avant correction et après correction ($f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)

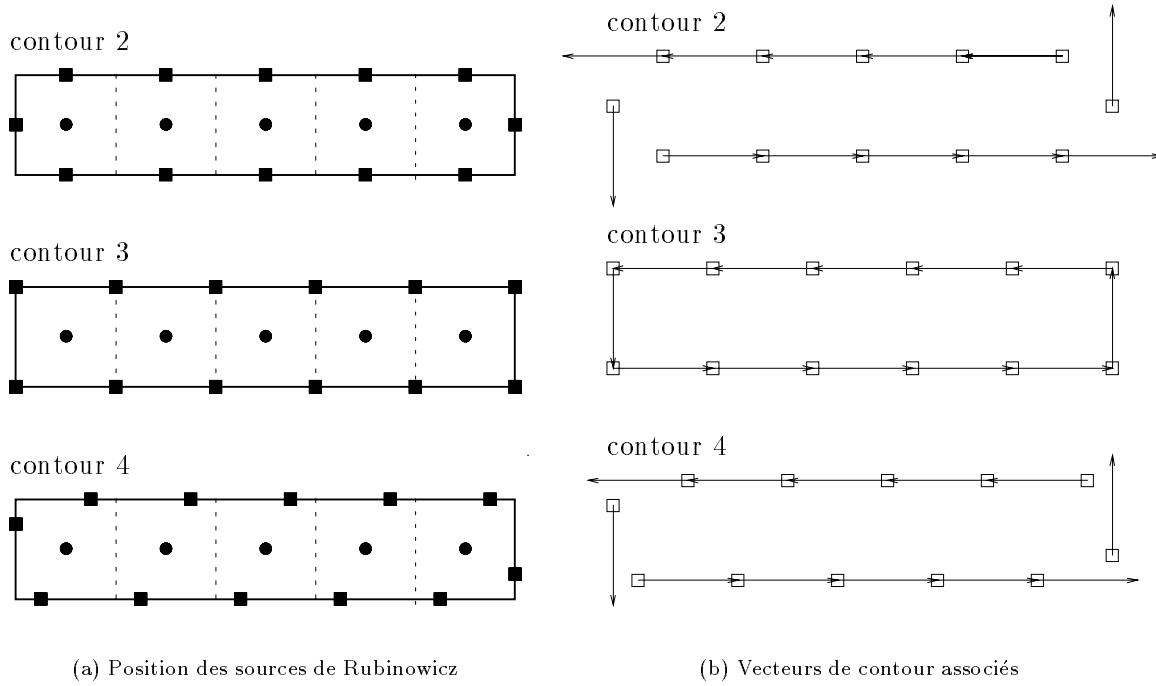


FIG. 5.41 - Différentes façons d'échantillonner le contour du réseau de sources secondaires pour positionner les sources de Rubinowicz

tout considérable. L'énergie de l'onde diffractée est divisée par un facteur 100, ce qui la rend perceptivement inaudible par rapport à l'onde primaire. De plus, on note que la valeur de l'erreur résiduelle de troncature est beaucoup plus stable en fonction de la fréquence qu'avec les sources idéales. L'écart-type associé à l'erreur moyenne \bar{E}_{trunc} est en revanche plus important avec la correction moyenne qu'avec la correction idéale, comment on pouvait s'y attendre.

Positionnement des sources de Rubinowicz

Le contour du réseau de sources secondaires le long duquel doivent se répartir les sources de Rubinowicz est défini sans ambiguïté (cf. Fig. 5.28), mais il existe une infinité de façons de l'échantillonner pour obtenir une distribution discrète de sources de Rubinowicz, comme l'illustre la figure 5.41. La question de l'espacement entre les sources de Rubinowicz se pose également. Il convient donc d'étudier l'influence du positionnement des sources de Rubinowicz sur l'annulation de l'onde diffractée.

La figure 5.42 compare la correction de l'erreur de troncature pour trois configurations de sources de Rubinowicz définies par les contours 1, 2 et 3 (cf. Figures 5.37 & 5.41). On note que, dans le cas du contour 1, la distribution de sources de Rubinowicz est suréchantillonnée d'un facteur 2, c'est-à-dire que les sources de Rubinowicz sont espacées de $\frac{\Delta}{2}$, où Δ désigne la valeur initiale de l'espacement entre sources appliqué aux contours 2 et 3. Les résultats obtenus avec les contours 2 et 3 indiquent que les performances des sources de Rubinowicz sont peu sensibles à la répartition des sources correctrices le long du contour. En revanche, le suréchantillonnage du réseau améliore considérablement l'efficacité des sources de Rubinowicz: avec le contour 1, l'erreur résiduelle de troncature atteint en effet un niveau de -50 dB, alors qu'elle reste plafonnée à -25 dB avec les contours 2 et 3. Cependant, l'amélioration ne joue que sur les basses fréquences: lorsque la fréquence augmente, la courbe du contour 1 converge vers les courbes des contours 2 et 3. On peut considérer en première approximation que l'effet du suréchantillonnage à $\frac{\Delta}{2}$ ne se manifeste que jusqu'à la fréquence $f_{\frac{\Delta}{2}} = 850$ Hz.

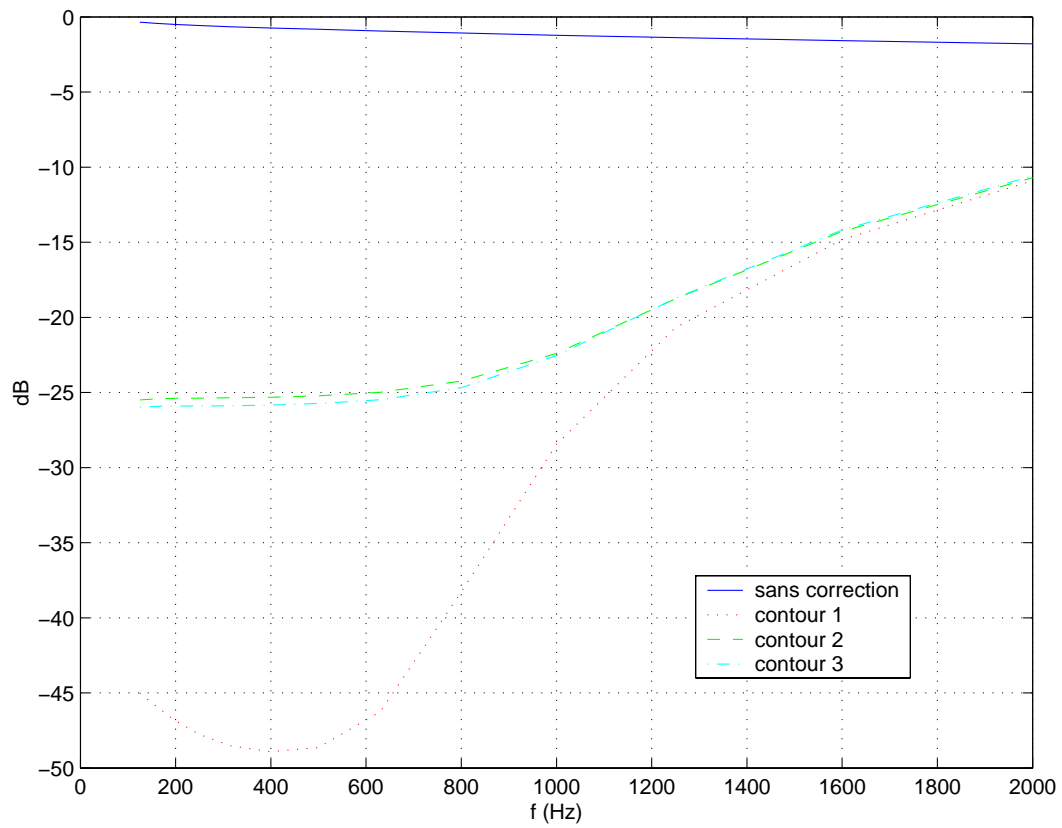


FIG. 5.42 - Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz: Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} avant correction et après correction pour différentes distributions de sources de Rubinowicz (source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)

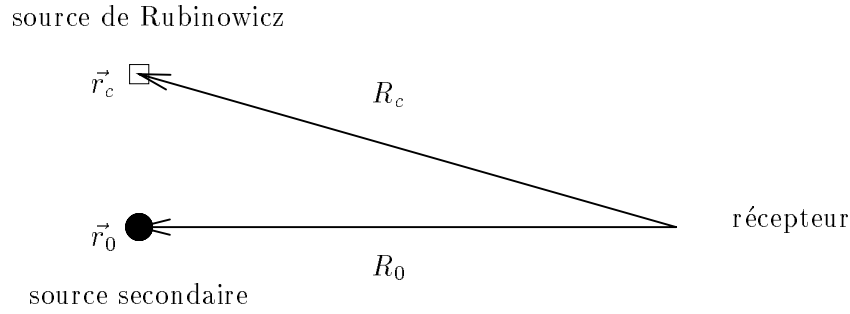


FIG. 5.43 - Concept de source de Rubinowicz virtuelle: La source de Rubinowicz située en \vec{r}_c est synthétisée par la source secondaire placée au point \vec{r}_0

Concept de source de Rubinowicz virtuelle [Pernaux, 1999]

Les sources de Rubinowicz constituent une approche performante pour annuler l'onde diffractée générée par la troncature, cependant cette méthode nécessite un nombre important des sources complémentaires. Afin de pallier cet inconvénient, on se propose de *synthétiser des sources de Rubinowicz virtuelles* à partir des sources secondaires du réseau existant.

Supposons, par exemple, qu'on veuille synthétiser une source de Rubinowicz censée être située en \vec{r}_c avec une source secondaire placée au point \vec{r}_0 . Il suffit d'ajouter dans le signal alimentant la source secondaire, le signal associé à la source de Rubinowicz, en essayant de corriger au préalable les différences de positionnement des deux sources. Il est évident que, pour obtenir le meilleur résultat, la position de la source secondaire doit être la plus proche possible de la position théorique de la source de Rubinowicz. La source de Rubinowicz et la source secondaire étant toutes les deux des monopôles, aucun problème de directivité n'intervient et, dans la substitution d'une source secondaire à une source de Rubinowicz, seule la *différence de distance de propagation* (cf. Fig. 5.43), qui se traduit par:

- une différence de temps de propagation:

$$\Delta_\tau = \tau_c - \tau_0 = \frac{R_c - R_0}{c} \quad \text{avec} \quad R_c = |\vec{r}_c - \vec{r}| \quad \text{et} \quad R_0 = |\vec{r}_0 - \vec{r}|$$

- et une différence d'atténuation due à la divergence sphérique:

$$\Delta_A = \frac{A_c}{A_0} = \frac{R_0}{R_c}$$

doit être prise en compte. En entrée de la source secondaire, le signal associé à la source de Rubinowicz subit donc un retard Δ_τ et un gain Δ_A .

Cependant, ces valeurs dépendent de la position \vec{r} du récepteur: or, une seule valeur définie pour une position unique de récepteur peut être appliquée au niveau d'une source secondaire. Ainsi, comme précédemment pour le terme de directivité des sources de Rubinowicz ou encore l'approximation de la Phase Stationnaire, la compensation ne peut être effectuée exactement qu'en un seul point d'écoute. On retient deux solutions:

- appliquer le retard et le gain associé à une position d'écoute moyenne située au centre de la zone d'écoute,
- introduire des techniques de filtrage inverse, les traitements associés au terme de directivité de la source de Rubinowicz et au concept de source virtuelle pouvant être mis en œuvre par le même filtre.

Méthodes alternatives aux sources de Rubinowicz

L'annulation de l'onde diffractée par des sources de Rubinowicz constitue une approche originale de réduction de l'effet de troncature. Il existe d'autres méthodes dont certaines ont été mises en œuvre dans le cadre des travaux menés à l'U.T.D.

Dans ce qui suit, on va s'intéresser à trois approches alternatives à l'approche de Rubinowicz:

- une méthode également basée sur l'annulation de l'onde diffractée, mais qui considère, au lieu des sources de Rubinowicz, des sources de Fresnel, ces dernières étant obtenues à partir d'un calcul approché de l'intégrale de diffraction,
- l'approximation de la Phase Stationnaire qui peut être vue comme une méthode de réduction de l'effet de *troncature verticale*,
- une méthode de pondération spatiale des sources situées au voisinage des extrémités du réseau de sources secondaires afin de réduire les effets de bord induit par sa troncature, cette méthode ne pouvant être appliquée à l'effet de *troncature horizontale*, dans le cas d'un réseau 1D horizontal.

Ces approches seront comparées à la méthode d'annulation de l'onde diffractée par les sources de Rubinowicz, en évaluant à la fois leurs performances en terme de réduction de l'erreur de troncature et leur facilité d'implémentation.

5.3.2 Annulation de l'onde diffractée par des sources de Fresnel

Calcul du signal d'erreur de troncature à partir d'un problème de Rayleigh

Dans cette approche, qui s'inspire des travaux de l'U.T.D. [Start, 1997], l'intégrale de diffraction, qui exprime l'onde diffractée induite par troncature, est calculée en utilisant l'approximation de Fresnel [Bruneau, 1983]. Dans ce but, la géométrie du problème est modifiée par rapport au problème de Rubinowicz: on reprend en effet le problème de Rayleigh, c'est-à-dire que l'espace de restitution représente un espace semi-infini limité par un plan vertical infini (cf. Annexe C).

Selon l'intégrale de Rayleigh I (cf. Section 3.2.5), l'onde primaire peut être reconstruite *exactement* à condition de disposer des sources monopolaires sur un plan vertical *infini*:

$$p_{pri}(\vec{r}, \omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} dx_0 dz_0 \quad \forall \vec{r} \in \Omega_2 \quad (5.31)$$

L'onde p_{sec} , qui est restitué par une distribution tronquée de sources secondaires (cf. Fig. 5.44), s'écrit:

$$p_{sec}(\vec{r}, \omega) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} dx_0 dz_0 \quad \forall \vec{r} \in \Omega_2 \quad (5.32)$$

Par suite, le signal d'erreur de troncature p_{tronc} s'obtient comme la différence entre l'onde secondaire restituée et l'onde primaire originale:

$$\begin{aligned} p_{tronc} &= p_{sec} - p_{pri} \\ &= \iint_P \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} dx_0 dz_0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

où la surface P représente la surface complémentaire du réseau de sources secondaires dans le plan infini $y_0 = 0$ (cf. Fig. 5.44). Or, il faut bien avoir présent à l'esprit que cette erreur de troncature est la même que celle obtenue dans le problème de Rubinowicz (cf. Equ. 5.24 & 5.25). Elle est *seulement formulée différemment à partir d'une autre géométrie du problème*.

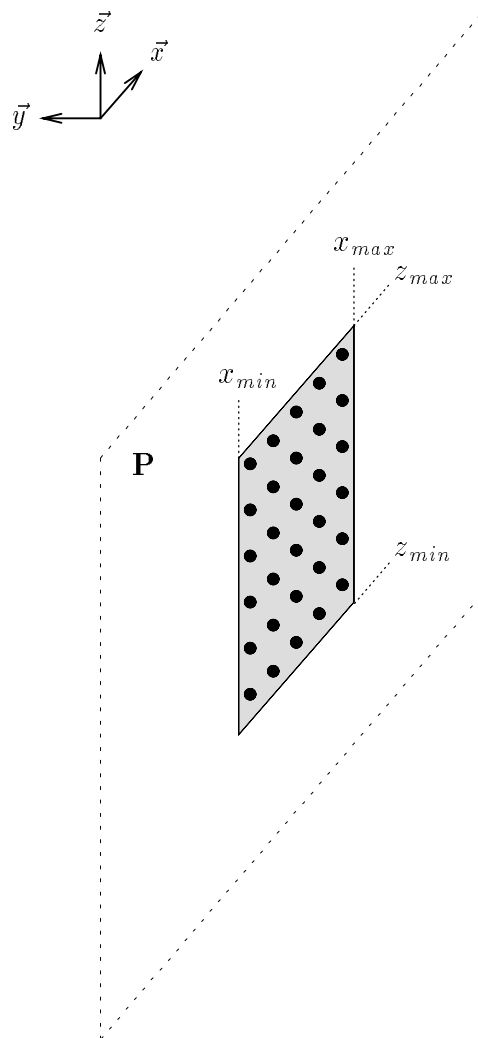


FIG. 5.44 - Problème de Rayleigh: Restitution par un réseau tronqué de sources secondaires

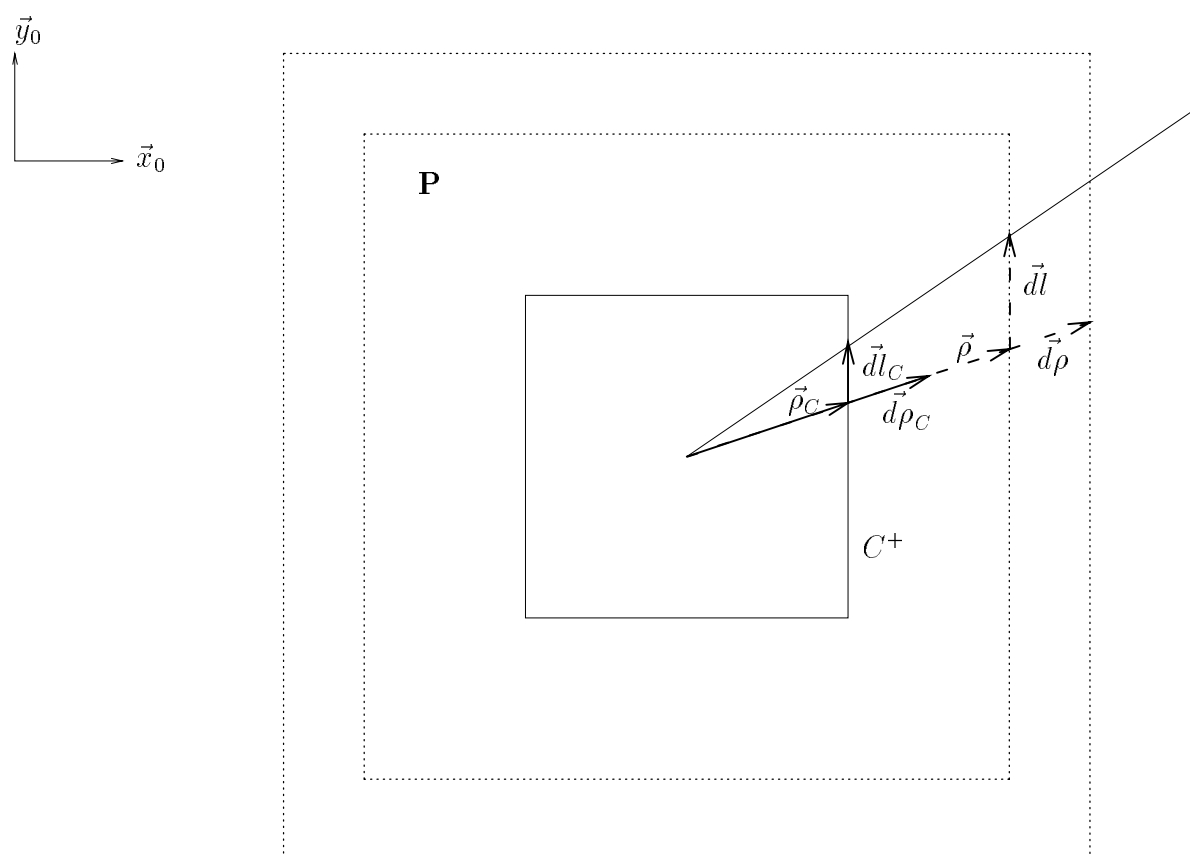


FIG. 5.45 - Intégration sur la surface P en utilisant l'approximation de Fresnel: Définition d'un repère adapté (on remarque que $\rho = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$)

Approximation de Fresnel

Dans tout ce qui suit, on suppose que la source primaire est un monopôle, c'est-à-dire que:

$$p_{pri}(\vec{r}_0, \omega) = A_0(\omega) \frac{e^{-jkR_0}}{4\pi R_0}$$

$$\vec{\nabla}_0 p_{pri}(\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} = A_0(\omega) \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{n}}{R_0} (1 + jkR_0) \frac{e^{-jkR_0}}{4\pi R_0^2}$$

La surface P est munie d'un nouveau repère (cf. Fig. 5.45), afin d'exprimer l'intégrale double (Equ. 5.33) sous la forme suivante:

$$p_{trunc}(\vec{r}, \omega) = \oint_{C+} dl_C \int_{\rho_C}^{+\infty} d\rho A_0(\omega) \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{n}}{R_0} (1 + jkR_0) \frac{1}{4\pi R_0^2} \frac{1}{2\pi R} e^{-jk(R+R_0)} \quad (5.34)$$

L'intégrale portant sur la variable ρ est de la forme:

$$I = \int_{\rho_C}^{+\infty} f(\rho) e^{j\phi(\rho)} d\rho \quad (5.35)$$

où la fonction $f(\rho)$ et le terme de phase $\phi(\rho)$ sont respectivement définis par:

$$f(\rho) = \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{n}}{R_0} (1 + jkR_0) \frac{1}{4\pi R_0^2} \frac{1}{2\pi R} \quad (5.36)$$

$$\phi(\rho) = -k(R + R_0) \quad (5.37)$$

Or, sur cette intégrale, on peut appliquer l'*approximation de Fresnel* (cf. Annexe H). Cette dernière est basée sur un développement limité à l'ordre 2 du terme de phase au voisinage de la borne finie ρ_C :

$$\phi(\rho) = \phi(\rho_C) + (\rho - \rho_C)\phi'(\rho_C) + \frac{1}{2} (\rho - \rho_C)^2 \phi''(\rho_C) + \dots \quad (5.38)$$

qui peut encore s'écrire:

$$\phi(\rho) = \phi(\rho_C) + \mu_C (\gamma^2 - \gamma_C^2)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \gamma & = & \sqrt{\frac{|\phi''(\rho_C)|}{2}} \left[\rho - \rho_C + \frac{\phi'(\rho_C)}{\phi''(\rho_C)} \right] \\ \gamma_C & = & \gamma|_{\rho=\rho_C} \\ & = & \mu_C \frac{\phi'(\rho_C)}{\sqrt{2|\phi''(\rho_C)|}} \\ \mu_C & = & \text{signe} [\phi''(\rho_C)] \end{array} \right.$$

En introduisant ce développement limité dans l'intégrale I , il vient:

$$I \simeq f(\rho_C) e^{j\phi(\rho_C)} e^{-j\mu_C \gamma_C^2} \int_{\rho_C}^{+\infty} e^{j\mu_C \gamma^2} d\rho \quad (5.39)$$

L'intégrale restante peut être exprimée en fonction des intégrales de Fresnel (cf. Annexe H):

$$I \simeq f(\rho_C) e^{j\phi(\rho_C)} e^{-j\mu_C \gamma_C^2} \frac{1}{\sqrt{\pi|\phi''(\rho_C)|}} \left[\frac{1}{2} (1 + j\mu_C) - C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma_C \right) - j\mu_C S \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma_C \right) \right] \quad (5.40)$$

Par analogie avec l'approximation de la Phase Stationnaire (cf. Annexe D) où la valeur d'une intégrale est approchée par la valeur de son intégrand au point de phase stationnaire, l'approximation de Fresnel consiste à approcher une intégrale définie sur un intervalle semi-infini $[\rho_C, +\infty]$, par la valeur de son intégrand évalué à sa borne finie $\rho = \rho_C$, moyennant un facteur correctif.

Sources de Fresnel

Ainsi, comme dans l'approche de Rubinowicz, l'*intégrale double* exprimant le signal d'erreur de troncature (Equ. 5.34) se réduit, grâce à l'approximation de Fresnel, à une *intégrale simple appliquée sur le contour du réseau de sources secondaires*:

$$p_{tronc}(\vec{r}, \omega) = \oint_C A_0(\omega) \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{n}}{R_0} (1 + jkR_0) \frac{e^{-jkR_0}}{4\pi R_0^2} \eta_{Fresnel}(\vec{R}_0, \vec{R}) \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} dl \quad (5.41)$$

où le terme $\eta_{Fresnel}(\vec{R}_0, \vec{R})$ est un facteur correctif qui découle de la simplification de l'intégrale double en une intégrale simple:

$$\eta_{Fresnel}(\vec{\rho}, \vec{R}) = \frac{e^{-j\mu_c \gamma^2}}{\sqrt{\pi|\phi''(\rho)|}} \left[\frac{1}{2} (1 + \mu_c j) - C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} |\gamma| \right) - j\mu_c S \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} |\gamma| \right) \right] \quad (5.42)$$

Dans cette dernière expression, l'indice C a été omis, puisque le point \vec{r}_0 appartient explicitement au contour C. Les dérivées première ϕ' et seconde ϕ'' du terme de phase sont données par:

$$\phi'(\rho) = -\frac{k}{\rho} \left[x_0 \left(\frac{x_0 - x_s}{R_0} + \frac{x_0 - x}{R} \right) + z_0 \left(\frac{z_0 - z_s}{R_0} + \frac{z_0 - z}{R} \right) \right] \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \phi''(\rho) = -\frac{k}{\rho^2} & \left\{ x_0^2 \left[\frac{(y_0 - y_s)^2 + (z_0 - z_s)^2}{R_0^3} + \frac{(y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}{R^3} \right] \right. \\ & + z_0^2 \left[\frac{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2}{R_0^3} + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{R^3} \right] \\ & \left. + 2x_0 z_0 \left[\frac{(x_0 - x_s)(z_0 - z_s)}{R_0^3} + \frac{(x_0 - x)(z_0 - z)}{R^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

L'intégrale définie par l'équation 5.41 rappelle en tout point la forme de l'intégrale de Rubinowicz (cf. Equ. 5.26). En effet, l'onde diffractée résultant de la troncature s'identifie à une onde émise par une distribution de sources, dites *sources de Fresnel*, qui sont réparties sur le contour du réseau de sources secondaires. Ces sources de Fresnel sont des monopôles décrits par le terme:

$$\frac{e^{-jkR}}{2\pi R}$$

qui sont alimentés par des microphones à gradient de pression destinés à capter le gradient de la pression:

$$A_0(\omega) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} = \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{n}}{R_0} (1 + jkR_0) \frac{e^{-jkR_0}}{4\pi R_0^2}$$

En outre, l'amplitude des sources est pondérée par le terme correctif $\eta_{Fresnel}$ dont l'expression analytique est assez complexe en comparaison de celui obtenu avec l'intégrale de Rubinowicz. On note que, comme $\eta_{Rubinowicz}$, ce terme correctif présente l'inconvénient de dépendre de la position du récepteur.

La conséquence directe de ce résultat est une seconde méthode de correction de l'effet de troncature, qui reste basée sur l'idée d'annuler l'onde diffractée par des sources additionnelles disposées sur le contour du réseau de sources secondaires, mais il s'agit cette fois de sources de Fresnel au lieu de sources de Rubinowicz. Dans l'approche de Fresnel, les sources de contour se substituent véritablement aux sources secondaires absentes. Il faut cependant remarquer que, du fait du développement limité, l'approximation de Fresnel privilégie les sources secondaires situées sur le contour C et à son voisinage immédiat, ce qui semble néanmoins valide, étant donné que, de toutes les sources éliminées par la troncature, celles placées sur le bord du réseau apportent certainement la contribution la plus importante.

On note enfin qu'à la différence de Rubinowicz, la modélisation de l'erreur de troncature par l'approche de Fresnel (Equ. 5.41) n'est pas valable uniquement dans la zone éclairée, mais aussi dans la zone d'ombre. D'ailleurs, l'approche de Fresnel ne distingue pas la zone éclairée de la zone d'ombre dans l'espace de restitution. Par la même, le problème de divergence du terme correctif qui a été rencontré pour les sources de Rubinowicz au niveau de la surface du cône est évité. Avec les sources de Fresnel, on est donc capable

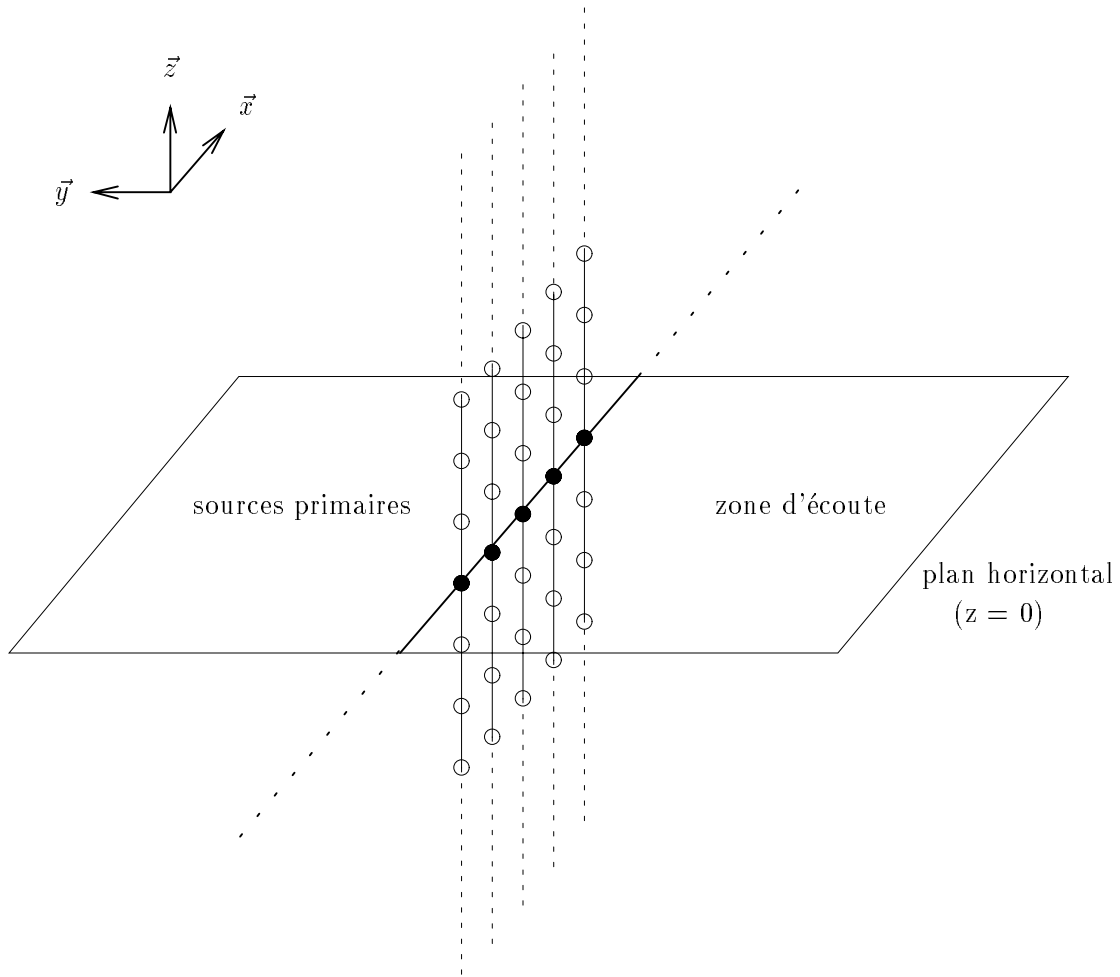


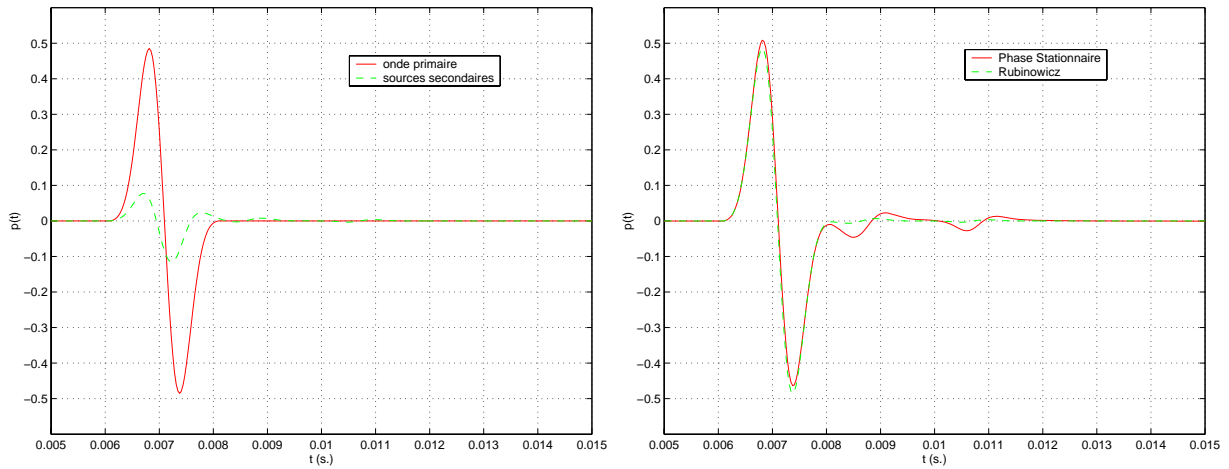
FIG. 5.46 - Approximation de la Phase Stationnaire appliquée à l'intégrale de Rayleigh: Le plan vertical infini se réduit à une droite horizontale infinie.

d'annuler l'onde diffractée dans tout le demi-espace en regard du réseau de sources secondaires. Dans la zone d'ombre, les sources de Fresnel ne sont pas seulement chargées d'annuler l'onde diffractée, mais elles vont aussi travailler à reconstruire l'onde primaire, puisqu'elles se substituent aux sources secondaires absentes et en particulier à la source secondaire située au point de phase stationnaire. La reconstruction de l'onde primaire ne sera toutefois correcte que dans la limite où le point de phase stationnaire reste proche du bord du réseau de sources secondaires.

5.3.3 Approximation de la Phase Stationnaire (troncature verticale)

Lien entre l'approximation de la Phase Stationnaire et la troncature du réseau de sources secondaires

Dans l'approximation de la Phase Stationnaire, la distribution de sources secondaires est ramenée d'un réseau 2D (une surface) à un réseau 1D (une courbe), sous l'hypothèse que l'espace au sein duquel évoluent les sources primaires et les auditeurs se limite à un plan horizontal, au lieu d'un volume 3D (cf. Chapitre 3). Ainsi, dans l'intégrale de Rayleigh, les sources secondaires sont réparties le long d'un *plan vertical infini* qui devient une *droite horizontale infinie* après l'approximation de la Phase Stationnaire (cf. Fig. 5.46). Cette simplification dérive de l'idée que les sources secondaires appartenant à cette droite, qui définit l'intersection



(a) Onde primaire et onde synthétisée par les sources secondaires sans correction de la troncature

(b) Onde synthétisée par les sources secondaires avec correction de la troncature (approximation de la Phase Stationnaire ou sources de Rubinowicz)

FIG. 5.47 - Correction de la troncature verticale par l'approximation de la Phase Stationnaire: Onde reconstruite au point $\vec{r} = [0.5, -1., 0.]$ (source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

entre le réseau de sources secondaires et le plan d'écoute, apportent une contribution prépondérante dans le travail de reconstruction. C'est d'ailleurs aussi cette idée qui a guidé notre démarche dans la troncature du réseau de sources secondaires.

Au delà de la possibilité de réduire le réseau de sources, le théorème de la Phase Stationnaire n'est rien d'autre qu'une méthode alternative pour compenser l'effet de troncature verticale en corrigeant l'amplitude des sources secondaires. Une fois reliée au problème de troncature, l'approximation de la Phase Stationnaire prend un nouvel éclairage: elle s'interprète comme une méthode de correction de la troncature du réseau de sources secondaires qui, dans notre configuration d'un réseau rectiligne horizontal, ne s'applique qu'à la troncature verticale.

Lien entre l'approximation de la Phase Stationnaire et les sources de Rubinowicz

On rappelle (cf. Section 5.2) que la troncature verticale est associée à une onde diffractée de forte amplitude qui vient se superposer quasi-simultanément et en opposition de phase à l'onde primaire, de telle sorte que le principal effet observé sur l'onde reconstruite par les sources secondaires est une importante atténuation de l'onde (cf. Fig. 5.47a). La correction de la Phase Stationnaire consiste à appliquer à chaque source secondaire le gain suivant:

$$\eta_{PS}(\vec{R}_0, \vec{R}) = \sqrt{\frac{2\pi}{jk}} \sqrt{\frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1}} \quad (5.45)$$

Du point de vue de sa mise en œuvre, la correction de la Phase Stationnaire est donc très séduisante par rapport à l'approche des sources de Rubinowicz, puisqu'elle se réduit à une correction de gain des sources secondaires et ne nécessite aucune source supplémentaire.

La figure 5.47b visualise l'onde reconstruite après correction par l'approximation de la Phase Stationnaire. A titre de comparaison, on a également reproduit l'onde obtenue en corrigeant la troncature verticale par des sources de Rubinowicz destinées à annuler l'onde diffractée verticale⁷. Sur ces courbes, on se rend bien

7. Dans toute cette section, les simulations pour les sources de Rubinowicz sont basées sur une correction idéale, c'est-à-dire que le facteur de directivité $\eta_{Rubinowicz}$ varie idéalement avec la position du récepteur.

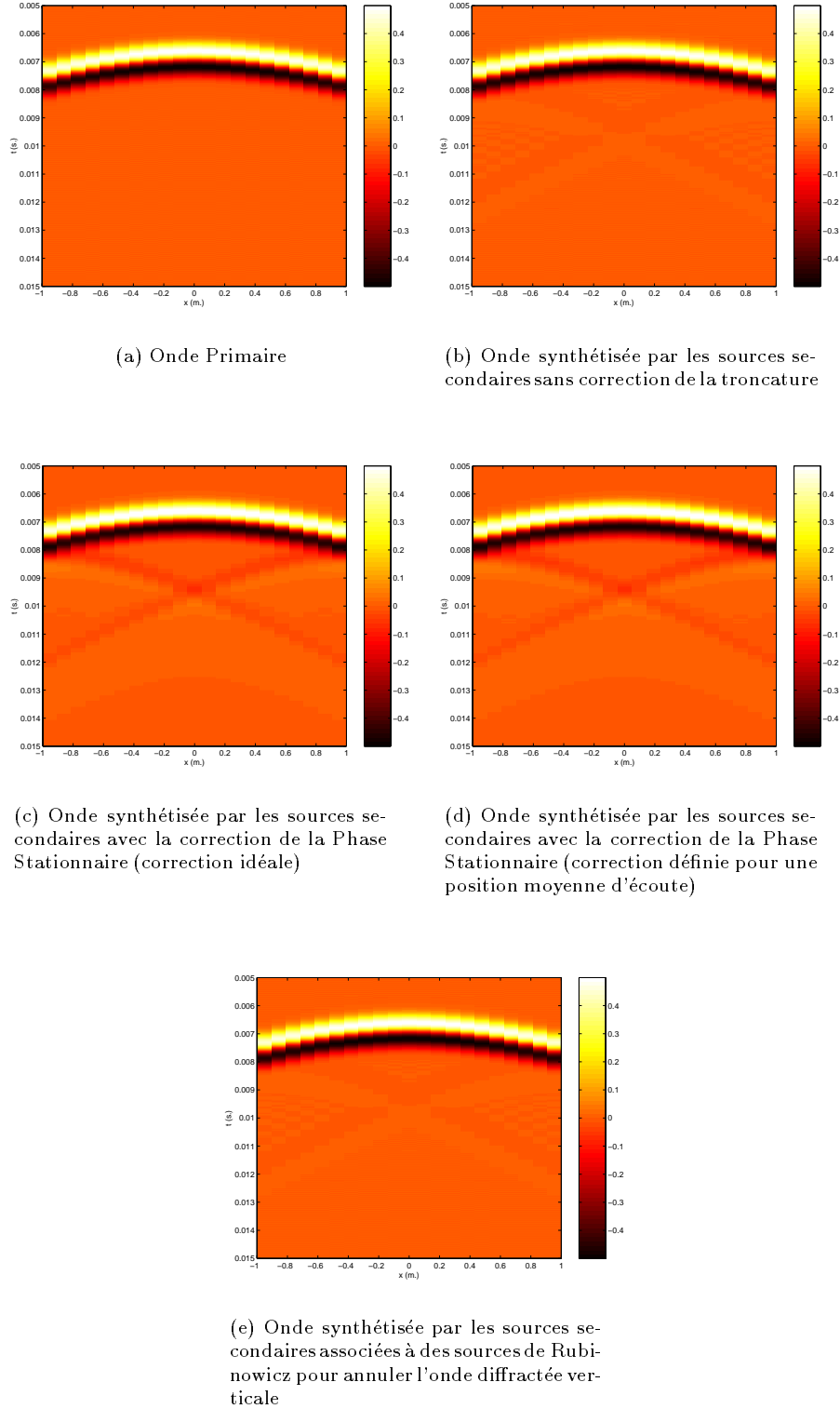


FIG. 5.48 - Correction de la troncature verticale par l'approximation de la Phase Stationnaire pour une source primaire centrée située en s_1 : Correction idéale et correction définie pour une position moyenne d'écoute, Comparaison avec l'annulation de l'onde diffractée verticale par des sources de Rubinowicz (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

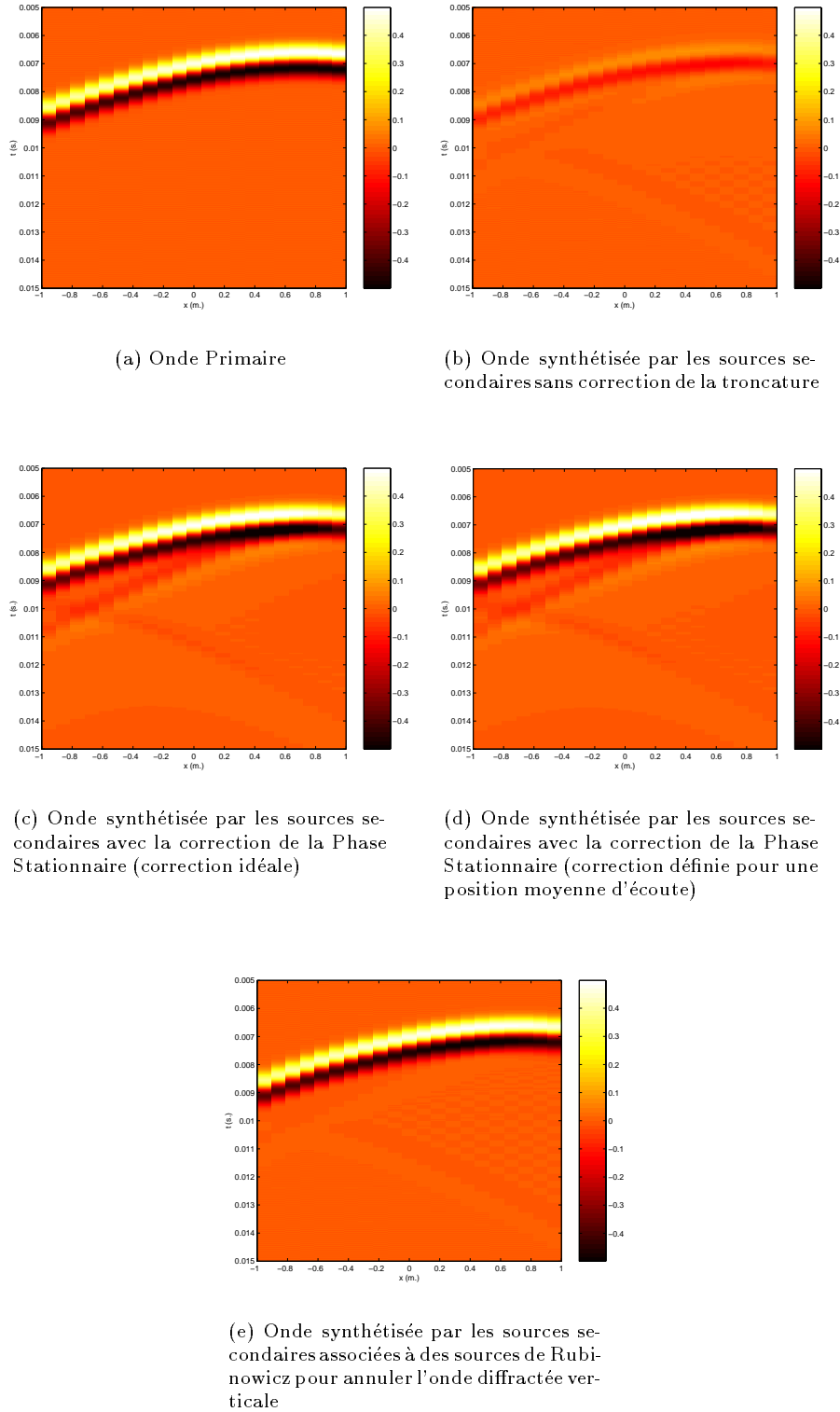


FIG. 5.49 - Correction de la troncature verticale par l'approximation de la Phase Stationnaire pour une source primaire excentrée située en s_2 : Correction idéale et correction définie pour une position moyenne d'écoute, Comparaison avec l'annulation de l'onde diffractée verticale par des sources de Rubinowicz (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_2 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

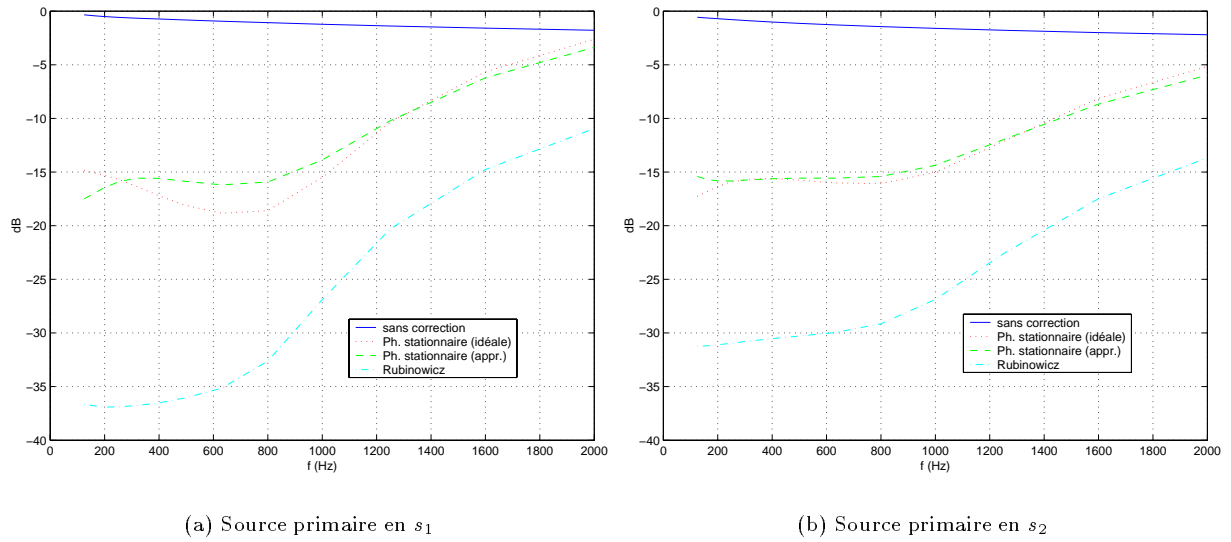


FIG. 5.50 - Erreur de troncature moyenne avant et après correction de la Phase Stationnaire: Correction idéale et correction approchée calculée pour une position moyenne d'écoute ($f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)

compte que les processus de correction mise en jeu par les deux méthodes sont différents. L'approximation de la Phase Stationnaire agit essentiellement comme un gain qui vient compenser l'atténuation de l'onde primaire. Ainsi l'onde synthétisée est globalement amplifiée, de telle sorte que l'onde diffractée associée à la troncature horizontale, dont on soupçonnait à peine l'existence avant correction, émerge brusquement, une fois appliquée la correction de la Phase Stationnaire. En revanche, le rôle des sources de Rubinowicz se borne à annuler l'onde diffractée verticale, sans affecter l'onde diffractée horizontale. La remontée de l'onde diffractée horizontale avec la correction de la Phase Stationnaire est encore mieux mise en évidence sur les figures 5.48c et 5.49c qui illustrent l'onde synthétisée par les sources secondaires le long de la ligne $y = -1$ m en fonction du temps.

Mise en œuvre d'une correction moyenne

Sur les figures 5.48 et 5.49, on a reproduit d'une part l'onde reconstruite avec la correction de la phase stationnaire appliquée idéalement, c'est-à-dire que le facteur de gain η_{PS} affecté à chaque source secondaire dépend de la position du récepteur considéré, et d'autre part l'onde obtenue lorsque le facteur de gain appliqué est calculé pour une position moyenne d'écoute, en l'occurrence le point $\vec{r} = [0., -1., 0.]$. On a vu en effet (cf. Chapitre 3) que l'implémentation du gain correctif de la Phase Stationnaire est impossible stricto sensu, puisque théoriquement il dépend de la position du récepteur, comme le terme directif des sources de Rubinowicz. Par suite, seul un facteur de gain unique correspondant à une position moyenne d'écoute peut être appliqué en pratique. Les figures 5.48c-d pour une source primaire centrée située en $s_1 = [0., 1., 0.]$ et 5.49c-d pour une source primaire excentrée située en $s_2 = [0.75, 1., 0.]$ comparent l'onde reconstruite avec la correction idéale et la correction moyenne. Les résultats sont sensiblement identiques.

Afin de compléter cette évaluation, l'erreur moyenne de troncature \bar{E}_{tronc} sur la zone d'écoute définie sur la figure 5.26 a aussi été calculée. Elle est représentée en fonction de la fréquence sur la figure 5.50. Les courbes obtenues confirment que l'approximation de la Phase Stationnaire est nettement moins performante que les sources de Rubinowicz. Avec la correction de la Phase Stationnaire, l'erreur de troncature est en effet ramenée à seulement -15 dB contre -30 dB pour les sources de Rubinowicz. Deux raisons l'expliquent: d'une part, l'onde diffractée verticale est moins bien atténuée et d'autre part, l'onde diffractée horizontale est amplifiée. Cet effet pervers de la correction de la Phase Stationnaire en réduit l'intérêt. Il revient à supprimer un problème en en créant un autre, puisque l'onde diffractée horizontale qui pouvait être négligée

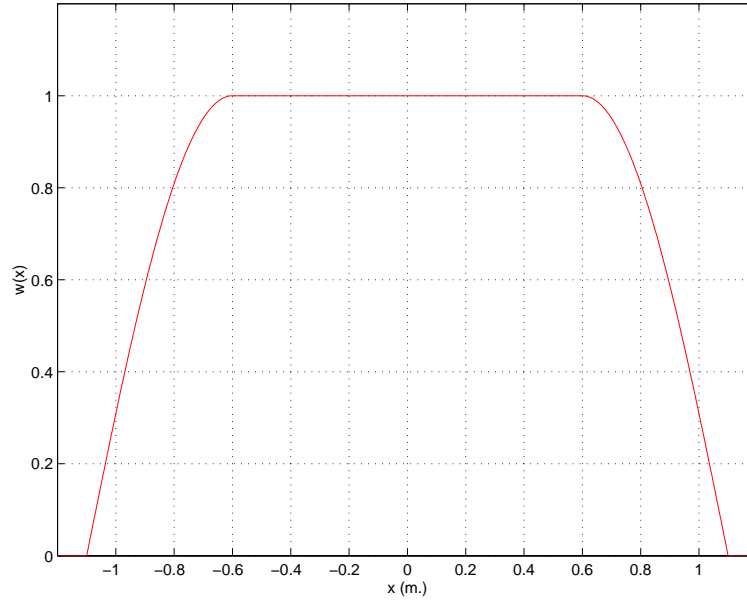


FIG. 5.51 - Fenêtre de pondération spatiale $w(x)$ appliquée à un réseau rectiligne de sources secondaires [Start, 1997]

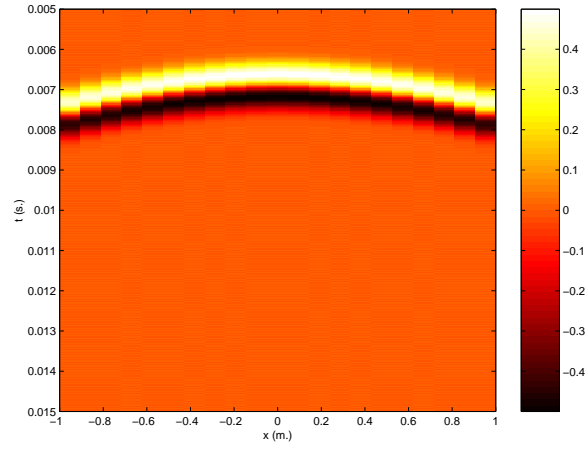
avant correction, doit à présent être prise en compte et si possible corrigée. En revanche, on note que, lorsque le facteur correctif est calculé pour une position moyenne de récepteur, les performances de la correction de la Phase Stationnaire restent sensiblement aussi bonnes que pour la correction idéale. En comparaison, on a observé pour les sources de Rubinowicz que l'erreur de troncature est notablement moins bien corrigée avec la correction moyenne qu'avec la correction idéale (cf. Fig. 5.40). On se rend compte ici que, sur la base des corrections moyennes, les performances des deux méthodes sont en fait sensiblement équivalentes, du moins sur le plan quantitatif. Sur le plan qualitatif, les signaux d'erreur s'avèrent en effet être très différents, puisqu'avec la correction de la Phase Stationnaire, se pose le problème de l'émergence de l'onde diffractée horizontale (cf. Fig. 5.48 & 5.49). A ce stade, pour départager les deux approches, il conviendrait de les comparer au moyen de tests d'écoute.

5.3.4 Fenêtre de pondération spatiale (troncature horizontale)

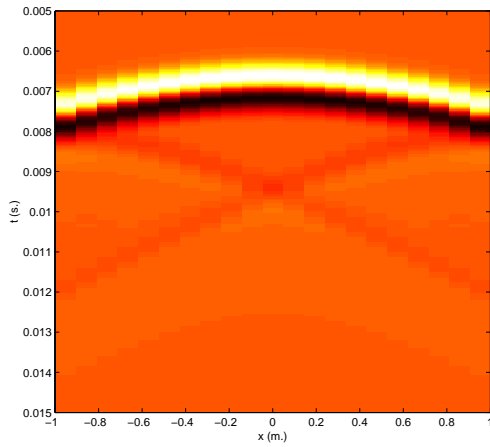
Une méthode classique pour minimiser les effets de la troncature spatiale consiste à pondérer les sources secondaires situées sur les bords du réseau, de manière à adoucir la transition (cf. page 222). Dans le cas d'un réseau 1D, comme l'antenne rectiligne que nous considérons ici, cette approche ne peut être appliquée qu'à la troncature horizontale, puisque dans sa dimension verticale, le réseau se réduit à une seule source. Or, on a vu que, dans la plupart des cas, l'onde diffractée horizontale peut être négligée. Cependant, lorsqu'on applique la correction de la Phase Stationnaire, l'onde diffractée horizontale se voit amplifiée jusqu'à ne plus devenir négligeable. On peut alors avoir recours aux techniques de pondération spatiale pour réduire son amplitude. Cette solution est largement utilisée par l'équipe du laboratoire d'Acoustique de l'U.T.D. dans les systèmes de *Wavefield Synthesis* qu'elle a développés, attendu qu'elle applique systématiquement l'approximation de la Phase Stationnaire.

Dans la littérature, plusieurs fonctions de pondérations sont proposées [Thomas, 1995], mais, dans les antennes qu'elle a développées, l'équipe de l'U.T.D. n'en a étudié qu'une seule, la pondération par une fonction harmonique appliquée à chacune des extrémités de l'antenne sur 20% de sa longueur totale (cf. Fig. 5.51) [Start, 1997]. Dans le cadre de cette étude, nous nous en limiterons à cette fenêtre de pondération.

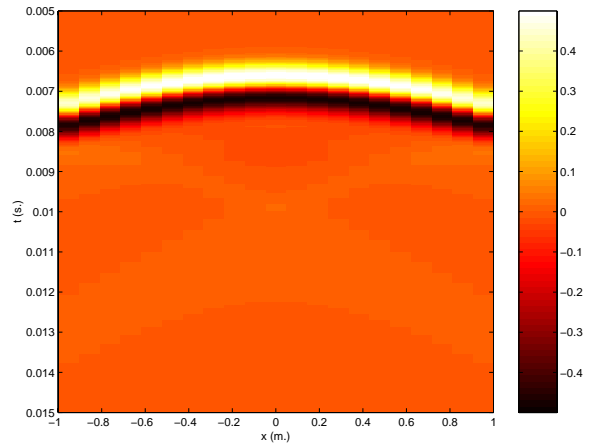
Il convient de noter qu'à la différence des approches d'annulation de l'onde diffractée (sources de Rubinowicz ou de Fresnel), la pondération spatiale tend à réduire la proportion des sources utiles, c'est-à-dire contribuant directement au travail de reconstruction de l'onde primaire, dans le nombre total de sources se-



(a) Onde Primaire

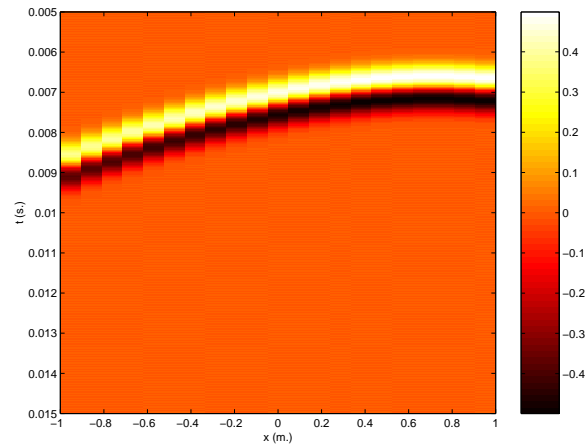


(b) Onde synthétisée: Approximation de la Phase Stationnaire sans pondération spatiale du réseau

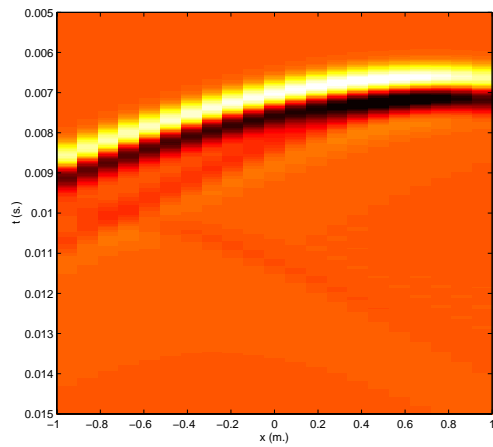


(c) Onde synthétisée: Approximation de la Phase Stationnaire avec pondération spatiale du réseau

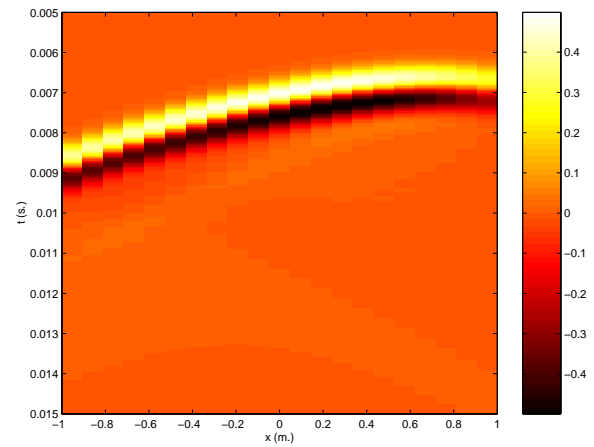
FIG. 5.52 - Correction de la troncature horizontale par pondération spatiale du réseau: Source primaire centrée située en s_1 (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)



(a) Onde Primaire



(b) Onde synthétisée: Approximation de la Phase Stationnaire sans pondération spatiale du réseau



(c) Onde synthétisée: Approximation de la Phase Stationnaire avec pondération spatiale du réseau

FIG. 5.53 - Correction de la troncature horizontale par pondération spatiale du réseau: Source primaire excentrée située en s_2 (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_2 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)

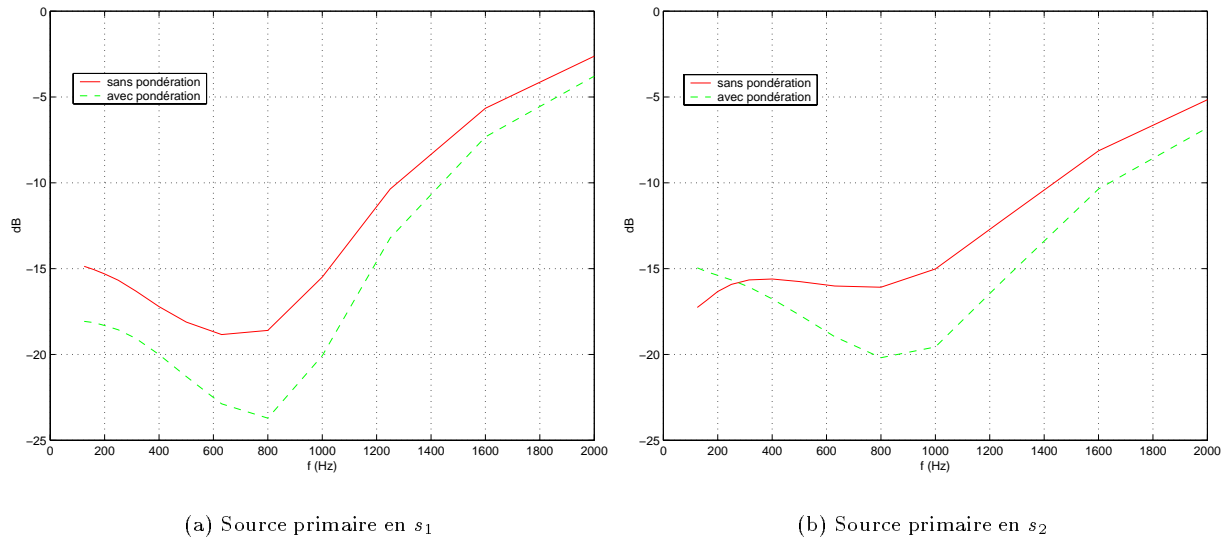


FIG. 5.54 - Erreur moyenne de troncature avant et après pondération spatiale du réseau de sources secondaires ($f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)

condaires. Ainsi, avec la fonction de pondération précédente (cf. Fig. 5.51), sur les $N = 21$ sources présentes, il ne reste que $N' = 13$ sources utiles après pondération, tandis qu'avec l'approche de Rubinowicz, seulement deux sources sont détournées pour l'annulation de l'onde diffractée, et ce quelle que soit la longueur du réseau de sources secondaires.

Les figures 5.52 et 5.53 illustrent l'onde synthétisée par les sources secondaires avec et sans pondération spatiale du réseau pour les deux positions de source primaire s_1 et s_2 . La troncature verticale est corrigée par l'approximation de la Phase Stationnaire. On observe que la pondération spatiale du réseau permet de bien atténuer l'onde diffractée horizontale. En termes d'erreur résiduelle de troncature \bar{E}_{tronc} , les performances sont représentées sur la figure 5.54. La pondération du réseau de sources secondaires apporte une réduction de l'onde diffractée de l'ordre de 3 à 5 dB. Il faudrait évaluer par des tests d'écoute si cette réduction est perceptivement sensible.

5.4 Conclusion

La mise en œuvre d'un réseau 1D rectiligne de sources secondaires introduit une erreur de troncature. D'un point de vue physique, le phénomène de troncature s'identifie à un phénomène de diffraction: l'erreur de troncature se traduit par la superposition à l'onde primaire d'une onde diffractée qui aurait été émise par des sources distribuées le long du contour du réseau de sources secondaires. On peut alors distinguer dans l'onde diffractée totale, l'onde diffractée verticale et l'onde diffractée horizontale. Quantitativement, pour un réseau rectiligne, pourvu qu'il soit de longueur raisonnable ($L > 1$ m), l'onde diffractée horizontale est négligeable par rapport à l'onde diffractée verticale. Il convient donc de traiter en priorité la troncature verticale.

Pour corriger l'effet de troncature, plusieurs solutions ont été envisagées:

- une solution originale basée sur la modélisation des ondes diffractées par l'intégrale de Rubinowicz et qui consiste à annuler l'onde diffractée par des sources réparties sur le contour du réseau de sources secondaires,
- une solution alternative dans laquelle les ondes diffractées sont modélisées au moyen d'intégrales de Fresnel,

- l’approximation de la Phase Stationnaire qui ne nécessite pas des sources correctives additionnelles et consiste à appliquer un facteur correctif aux sources secondaires elles-mêmes,
- une pondération spatiale du réseau destinée à adoucir la transition au niveau de ses bords.

Les deux premières solutions s’appliquent aussi bien à la troncature verticale qu’horizontale. La troisième ne s’applique en revanche qu’à la troncature verticale et la dernière solution à la troncature horizontale. A l’exception de la méthode des sources de Fresnel qui est très proche de celle des sources de Rubinowicz, les performances des différentes solutions ont été évaluées au moyen de simulations numériques. Les résultats mettent en évidence l’intérêt de la méthode des sources de Rubinowicz. Elle présente cependant l’inconvénient de requérir un grand nombre de sources correctives additionnelles. De ce point de vue, l’approximation de la Phase Stationnaire est plus intéressante, puisqu’elle ne nécessite aucune source supplémentaire, mais sa correction est moins efficace. En outre, elle contribue à amplifier l’onde diffractée horizontale. Dans une première étape, il est donc possible de l’utiliser, mais les sources de Rubinowicz proposent une alternative qui pourra être mise en œuvre dans de futurs travaux, surtout si le concept de sources de Rubinowicz virtuelles s’avère être exploitable. L’ensemble de ces conclusions est aussi subordonné à une évaluation subjective des effets de la troncature.

Références Bibliographiques

- BRUNEAU M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans.
- DE VRIES D., START E.W. & VALSTAR V.G. (1994). The Wave Field Synthesis Concept Applied to Sound Reinforcement: Restrictions and Solutions. *In: Proceedings of the A.E.S. 96th Convention*.
- KIRKEBY O. & NELSON P.A. (1993). Reproduction of Plane Wave Sound Fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, **94**, pp. 2992–3000.
- KIRKEBY O., NELSON P.A., ORDUNA-BUSTAMANTE F. & HAMADA H. (1996). Local Sound Field Reproduction Using Digital Signal Processing. *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**, pp. 1584–1593.
- NELSON P.A. (1994). Active Control of Acoustic Fields and the Reproduction of Sound. *J. Sound Vib.*, **177**(4), pp. 447–477.
- PERNAUX J.-M. (1999). *Restitution sonore spatialisée par antenne de haut-parleurs selon un procédé holo-phonique: Etude des phénomènes de diffraction et mise en œuvre d'une solution basée sur l'annulation du champ diffracté*. Rapp. tech. D.E.A. A.T.I.A.M., Université de la Méditerranée, AIX MARSEILLE II.
- SKUDRZYK E. (1971). *The Foundations of Acoustics, Basic Mathematics and Basic Acoustics*. Springer-Verlag, Wien New York.
- START E. (1997). *Direct Sound Enhancement by Wave Field Synthesis*. Ph.D. Thesis, Faculty of Applied Physics, Delft, Pays-Bas.
- THOMAS Y. (1995). *Signaux et systèmes linéaires*. Masson, Paris.
- VERHEIJEN E. (1997). *Sound reproduction by wave field synthesis*. Ph.D. Thesis, Faculty of Applied Physics, Delft, Pays-Bas.

Table des Illustrations

5.1	Reproduction d'un champ sonore par des sources secondaires distribuées sur une surface fermée (cas d'un cube)	217
5.2	Numérotation des faces du cube	218
5.3	Troncature de la distribution de sources secondaires de Kirchhoff (seule la face 1 du cube est conservée)	219
5.4	Reproduction d'un champ sonore par un plan infini de sources secondaires (Intégrales de Rayleigh)	220
5.5	Reproduction par un plan fini de sources secondaires (approche de Rayleigh avec troncature)	221
5.6	Effets de la troncature sur le spectre d'une onde plane p_0 ($P_0 = 1$, $(k_x, k_z) = (\pi, \pi)$, $y_0 = 0$): Influence de la taille de la fenêtre de troncature	223
5.7	Fenêtre de troncature pondérée par une fonction sinusoïdale	224
5.8	Analogie entre troncature et diffraction: Réseau tronqué et réseau infini masqué par un écran percé d'une ouverture	225
5.9	Phénomène de diffraction: A l'onde directe se superpose une onde diffractée générée par les bords de l'ouverture	226
5.10	Mise en évidence de l'onde diffractée par un réseau 2D carré: Configuration de la source primaire, des sources secondaires et des récepteurs (les récepteurs sont situés dans le plan horizontal défini par l'équation $z = 0$ — récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$ —, les sources secondaires sont réparties sur un réseau plan vertical de forme carrée centré sur l'origine du repère — réseau carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m. —, cf. Annexes E & F)	228
5.11	Onde de pression originale et onde synthétisée par un réseau carré de sources secondaires: Le front d'onde est suivi d'une onde résiduelle qui correspond à l'onde diffractée (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)	229
5.12	Géométrie du problème de Rubinowicz	230
5.13	Repère associé à la surface K du cône	232
5.14	Notations relatives à l'intégrale de Rubinowicz (la normale \vec{n} est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{\rho}$ et \vec{dl})	234
5.15	Géométrie de Rubinowicz appliquée au problème de troncature d'un réseau de sources secondaires	235
5.16	Comparaison entre l'erreur de troncature et l'onde diffractée par une ouverture carrée obtenue par le modèle de Rubinowicz (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)	238
5.17	Contour de l'ouverture associée au réseau tronqué de sources secondaires	239
5.18	Mise en évidence des 4 ondes diffractées correspondant aux 4 côtés qui définissent le contour de l'ouverture — cf. Fig. 5.17 — (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)	240
5.19	Zones de reconstruction de Huygens	241
5.20	Détermination du contour d'un réseau discret de sources secondaires: Proposition de trois contours possibles	243
5.21	Maillage associé au réseau discret de sources secondaires: Mise en évidence du contour virtuel du réseau	243
5.22	Onde primaire (trait continu) et onde reconstruite (trait pointillé): L'onde reconstruite est altérée par les ondes diffractées résultant de la troncature (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)	244

5.23	Onde primaire (trait continu) et ondes diffractées (trait pointillé) par le contour du réseau de sources secondaires: Visualisation des ondes diffractées associées aux différents côtés du carré constituant le contour du réseau — cf. Fig. 5.17 — (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)	245
5.24	Interférence destructrice entre l'onde primaire et l'onde diffractée émise par le côté 1 du contour — cf. Fig. 5.17 — (le trait continu et le trait pointillé représentent respectivement l'onde primaire seule et l'onde primaire sommée à l'onde diffractée): L'effet global est une atténuation de l'onde primaire (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)	246
5.25	Onde primaire (trait continu) et onde diffractée (trait pointillé) par le côté 3 du contour — cf. Fig. 5.17 — à la fréquence de 100Hz: Les deux ondes se chevauchent partiellement alors qu'elles étaient dissociées pour $f = 500$ Hz (récepteur en $\vec{r}[0.75, -1., 0.]$, source primaire en $s_0[0.25, 1., 0.25]$, réseau de sources secondaires carré de côté $l = 1$ m., $N = 121$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.10, cf. Annexes E & F)	246
5.26	Positions des récepteurs sélectionnés pour l'évaluation du critère d'erreur moyenne de troncature dans le plan horizontal $z = 0$ ($\Delta' = 0.35$ m)	248
5.27	Restitution restreinte à un plan horizontal: Le réseau de sources secondaires se réduit à une ligne	249
5.28	Contour du réseau rectiligne de sources secondaires pour le calcul de l'onde diffractée	249
5.29	Troncature dans le cas d'un réseau 1D: Configuration de la source primaire, des sources secondaires et des récepteurs (récepteurs en $y = -1$ m., sources primaires en $s_1[0., 1., 0.]$ et $s_2[0.75, 1., 0.]$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Annexes E & F)	250
5.30	Troncature verticale et troncature horizontale: Source primaire centrée située en s_1 (récepteurs en $y = -1$ m., $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	251
5.31	Troncature verticale et troncature horizontale: Source primaire excentrée située en s_2 (récepteurs en $y = -1$ m., $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	252
5.32	Troncature verticale et troncature horizontale: Réseau tronqué à $N = 6$ sources secondaires (récepteurs en $y = -1$ m., source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 6$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	253
5.33	Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} en fonction de la fréquence (cf. Equ. 5.29) pour une source primaire centrée située en s_1 : Erreur totale, erreur résultant de la troncature verticale seule et erreur résultant de la troncature horizontale seule — la valeur de l'écart-type est représentée par des barres verticales — (source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)	255
5.34	Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} en fonction de la fréquence (cf. Equ. 5.29) pour une source primaire centrée située en s_2 : Erreur totale, erreur résultant de la troncature verticale seule et erreur résultant de la troncature horizontale seule — la valeur de l'écart-type est représentée par des barres verticales — (source primaire en s_2 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)	256
5.35	Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} en fonction de la fréquence (cf. Equ. 5.29) pour un réseau tronqué à $N = 6$ sources secondaires: Erreur totale, erreur résultant de la troncature verticale seule et erreur résultant de la troncature horizontale seule — la valeur de l'écart-type est représentée par des barres verticales — (source primaire en s_1 , $f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 6$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)	257
5.36	Symétrie verticale des sources de Rubinowicz: Le nombre de sources correctives peut être divisé par deux si la source primaire, les sources secondaires et le point récepteur appartiennent au même plan horizontal	258
5.37	Géométrie du réseau de sources de Rubinowicz: Contour 1 de référence (N.B.: les sources de Rubinowicz sont espacées de $\frac{\Delta}{2}$)	260

5.38	Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz (source primaire en s_1): Correction idéale et correction approchée définie pour une position moyenne d'écoute (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	261
5.39	Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz (source primaire en s_2): Correction idéale et correction approchée définie pour une position moyenne d'écoute (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_2 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	262
5.40	Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz: Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} avant correction et après correction ($f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)	263
5.41	Différentes façons d'échantillonner le contour du réseau de sources secondaires pour positionner les sources de Rubinowicz	264
5.42	Correction de la troncature par les sources de Rubinowicz: Erreur de troncature moyenne \bar{E}_{tronc} avant correction et après correction pour différentes distributions de sources de Rubinowicz (source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)	265
5.43	Concept de source de Rubinowicz virtuelle: La source de Rubinowicz située en \vec{r}_c est synthétisée par la source secondaire placée au point \vec{r}_0	266
5.44	Problème de Rayleigh: Restitution par un réseau tronqué de sources secondaires	268
5.45	Intégration sur la surface P en utilisant l'approximation de Fresnel: Définition d'un repère adapté (on remarque que $\rho = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$)	269
5.46	Approximation de la Phase Stationnaire appliquée à l'intégrale de Rayleigh: Le plan vertical infini se réduit à une droite horizontale infinie.	272
5.47	Correction de la troncature verticale par l'approximation de la Phase Stationnaire: Onde reconstruite au point $\vec{r} = [0.5, -1., 0.]$ (source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	273
5.48	Correction de la troncature verticale par l'approximation de la Phase Stationnaire pour une source primaire centrée située en s_1 : Correction idéale et correction définie pour une position moyenne d'écoute, Comparaison avec l'annulation de l'onde diffractée verticale par des sources de Rubinowicz (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	274
5.49	Correction de la troncature verticale par l'approximation de la Phase Stationnaire pour une source primaire excentrée située en s_2 : Correction idéale et correction définie pour une position moyenne d'écoute, Comparaison avec l'annulation de l'onde diffractée verticale par des sources de Rubinowicz (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_2 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	275
5.50	Erreur de troncature moyenne avant et après correction de la Phase Stationnaire: Correction idéale et correction approchée calculée pour une position moyenne d'écoute ($f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)	276
5.51	Fenêtre de pondération spatiale $w(x)$ appliquée à un réseau rectiligne de sources secondaires [Start, 1997]	277
5.52	Correction de la troncature horizontale par pondération spatiale du réseau: Source primaire centrée située en s_1 (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_1 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	278
5.53	Correction de la troncature horizontale par pondération spatiale du réseau: Source primaire excentrée située en s_2 (récepteurs en $y = -1\text{m.}$, source primaire en s_2 , $f = 500\text{ Hz}$, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1\text{ m.}$, cf. Fig. 5.29, cf. Annexes E & F)	279

5.54 Erreur moyenne de troncature avant et après pondération spatiale du réseau de sources secondaires ($f = 500$ Hz, réseau de sources secondaires rectiligne de $N = 21$ sources espacées de $\Delta = 0.1$ m., cf. Fig. 5.29 & 5.26, cf. Annexes E & F)	280
---	-----
