

Chapitre 4

Echantillonnage spatial de la distribution de sources secondaires

It finally happens: I'm going slightly mad.

Album Innuendo - Queen - 1991

Sommaire

4.1	Discrétisation de la distribution de sources secondaires	183
4.2	Pas d'échantillonnage	184
4.2.1	Notion de spectre spatial	184
4.2.2	Spectre d'une onde plane	185
4.2.3	Spectre d'une onde sphérique	187
	Spectre 3D	187
	Spectre 2D	189
4.2.4	Condition de Shannon	191
	Onde plane	192
	Onde sphérique	194
4.3	Repliement de spectre spatial	196
4.3.1	Phénomène de repliement	196
4.3.2	Filtre Anti-repliement	200
4.4	Processus d'interpolation spatiale	204
4.5	Conclusion	207
	Références Bibliographiques	209

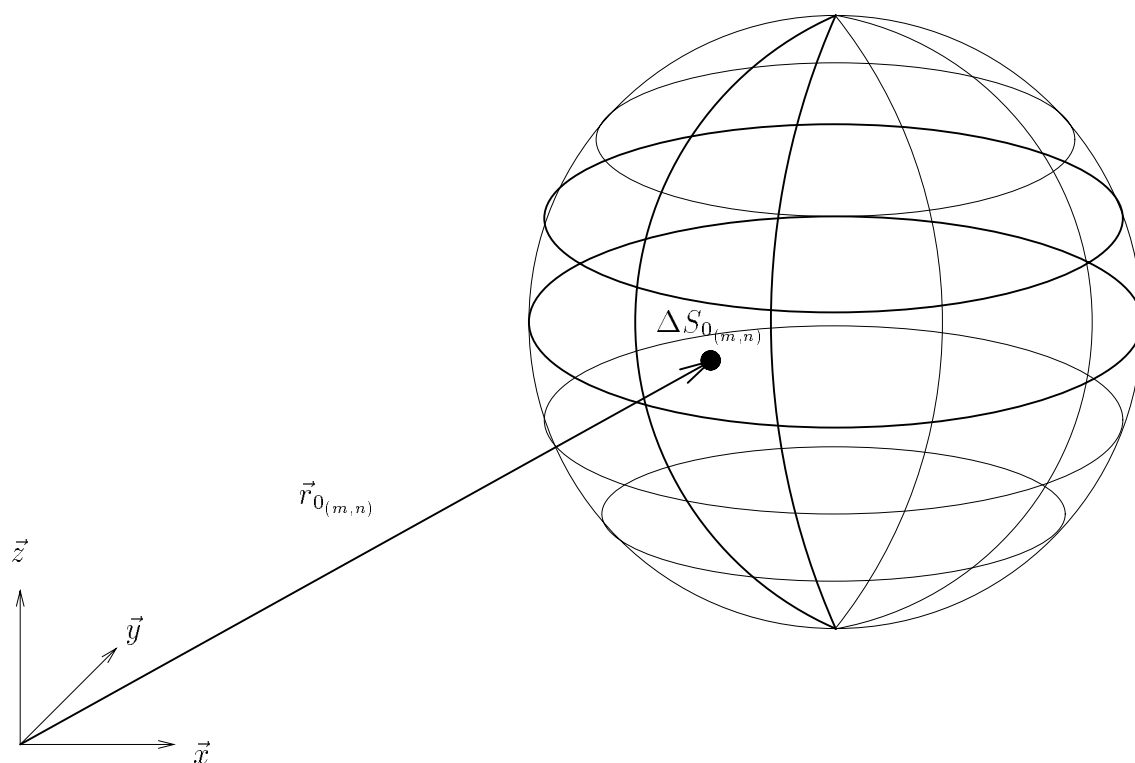


FIG. 4.1 - Discrétisation de la distribution de sources secondaires: Maillage de la surface $\partial\Omega_0$

Qu'il s'agisse de l'intégrale de Kirchhoff ou de l'intégrale de Rayleigh généralisée 2D, la théorie prévoit une distribution *continue* de sources secondaires. Or, en pratique, on ne dispose que de réseaux discrets de microphones, à la prise de son, et de haut-parleurs, à la restitution, ce qui pose le problème de l'*échantillonnage spatial du champ sonore*.

Dans le principe, l'échantillonnage d'un signal à support spatial n'est pas différent de celui d'un signal temporel. La seule difficulté réside dans le nombre de variables à gérer. Un champ sonore évalué sur une surface varie en effet en fonction de deux coordonnées d'espace, (x, y) par exemple, dans le cas d'un plan d'équation:

$$z = z_0$$

référéncé à un système de coordonnées cartésiennes. Dans le domaine dual, le spectre correspondant est donc également une fonction de deux variables, cette fois un couple de fréquences spatiale (χ_x, χ_y) qui définit un *vecteur de fréquences spatiales* $\vec{\chi}(\chi_x, \chi_y)$.

Au cours de ce chapitre, les notions relatives à l'échantillonnage, telles que le *critère de Shannon*, le *repliement de spectres* ou le *processus d'interpolation* du signal échantillonné en un signal de nouveau continu, vont être explicitées dans le cas d'un signal à deux variables d'espace.

4.1 Discrétisation de la distribution de sources secondaires

Reprenons l'intégrale de Kirchhoff (cf. Equ. 3.4 & 3.3). Avec les notations données au chapitre 3:

$$\begin{cases} g_1(\vec{r}) &= g_\infty(\vec{r}) \\ g_2(\vec{r}) &= \vec{\nabla} g_\infty(\vec{r}) \cdot \vec{n} \\ p_1(\vec{r}) &= \vec{\nabla} p_0(\vec{r}) \cdot \vec{n} \\ p_2(\vec{r}) &= p_0(\vec{r}) \end{cases}$$

elle peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution (cf. Equ. 3.5):

$$\begin{aligned} p(\vec{r}) &= [g_1 * p_1](\vec{r}) - [g_2 * p_2](\vec{r}) \\ &= \iint_{\partial\Omega_0} [g_1(\vec{r} - \vec{r}_0) p_1(\vec{r}_0) - g_2(\vec{r} - \vec{r}_0) p_2(\vec{r}_0)] dS_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

En vue de discrétiser le réseau de sources secondaires, on procède à un *maillage* de la surface $\partial\Omega_0$ sur laquelle se répartissent les sources secondaires. On découpe cette surface en un nombre donné $M \times N$ de surfaces élémentaires $\Delta S_{0(m,n)}$ ($m = 1 \dots M, n = 1 \dots N$) (cf. Fig. 4.1). Le centre de chacune de ces surfaces est repéré par le vecteur $\vec{r}_{0(m,n)}$ et on y dispose une source secondaire. Le signal de pression \hat{p} qui est restitué par le réseau discret de sources secondaires ainsi constitué s'exprime:

$$\hat{p}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [g_1(\vec{r} - \vec{r}_{0(m,n)}) p_1(\vec{r}_{0(m,n)}) - g_2(\vec{r} - \vec{r}_{0(m,n)}) p_2(\vec{r}_{0(m,n)})] \Delta S_0 \quad (4.2)$$

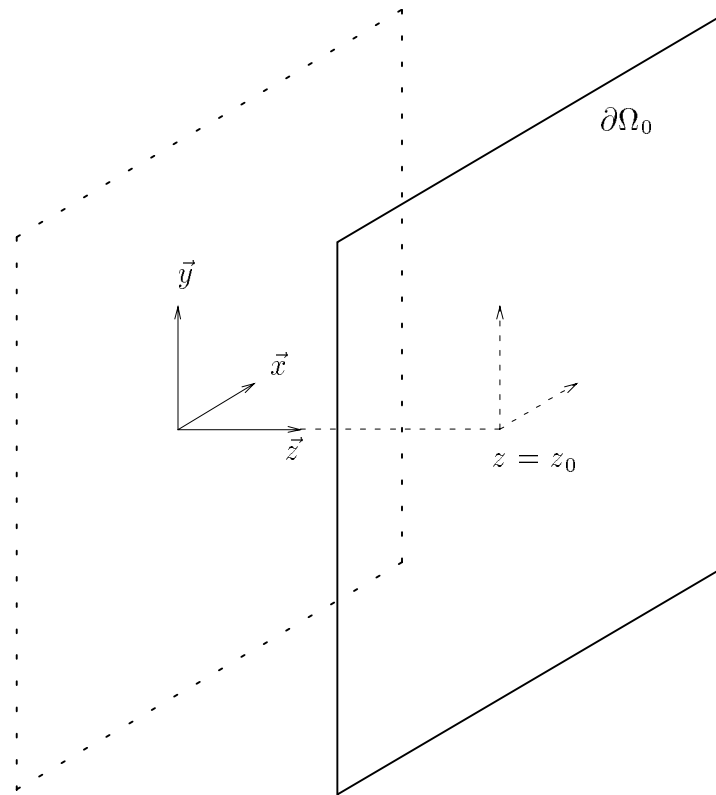
La discrétisation du réseau équivaut donc à substituer aux intégrales continues des *sommes discrètes*. Par ailleurs, si p_{1_e} et p_{2_e} représentent les pressions p_1 et p_2 une fois échantillonnées:

$$p_{1_e}(\vec{r}_0) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_1(\vec{r}_0) \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_{0(m,n)}) \Delta S_0 \quad (4.3)$$

$$p_{2_e}(\vec{r}_0) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_2(\vec{r}_0) \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_{0(m,n)}) \Delta S_0 \quad (4.4)$$

on se rend compte que la pression \hat{p} (cf. Equ. 4.2) peut encore s'écrire:

$$\begin{aligned} \hat{p}(\vec{r}) &= \iint_{\partial\Omega_0} [g_1(\vec{r} - \vec{r}_0) p_{1_e}(\vec{r}_0) - g_2(\vec{r} - \vec{r}_0) p_{2_e}(\vec{r}_0)] dS_0 \\ &= [g_1 * p_{1_e}](\vec{r}) - [g_2 * p_{2_e}](\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.5)$$


 FIG. 4.2 - Système de coordonnées associé à la surface $\partial\Omega_0$

La pression restituée par un réseau discret de sources secondaires est donc décrite par l'intégrale de Kirchhoff, dans laquelle on considère les pressions échantillonnées p_{1_e} et p_{2_e} au lieu des signaux continus p_1 et p_2 . Il convient de noter que, contrairement aux signaux de pression p_1 et p_2 , les opérateurs de propagation g_1 et g_2 définis par les fonctions de Green restent des signaux continus, bien que le réseau de sources secondaires soit discret. Ainsi *l'échantillonnage spatial n'affecte pas l'opérateur de propagation*.

Comme dans le cas de l'échantillonnage d'un signal temporel, la question essentielle de l'échantillonnage spatial réside dans le *choix du pas d'échantillonnage*: les pressions p_1 et p_2 doivent être échantillonnées avec un pas Δ qui est déterminé en fonction de leurs variations spatiales. Plus le champ varie rapidement sur la surface $\partial\Omega_0$, plus le pas d'échantillonnage doit être faible. Cette idée se traduit par la *condition de Shannon* qui va être expliciter dans le cas de signaux variant en fonction de deux coordonnées d'espace. Les variations spatiales du signal de pression sont en fait décrites par son *spectre spatial* qui est obtenu en appliquant à la pression $p(\vec{r}_0)$ une transformée de Fourier bidimensionnelle sur ses coordonnées d'espace. Après avoir défini la notion de spectre spatial en l'illustrant avec les exemples d'une onde plane et d'une onde sphérique, nous allons la relier au choix du pas d'échantillonnage.

4.2 Pas d'échantillonnage

4.2.1 Notion de spectre spatial

On considère un signal de pression acoustique $p_0(\vec{r})$ quelconque qui est évalué sur une surface $\partial\Omega_0$. Pour simplifier, on se place dans le cas où la surface $\partial\Omega_0$ est un plan. L'espace Ω étant muni d'un repère orthornormé $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le système d'axes est choisi de telle sorte que l'axe \vec{z} soit orthogonal au plan $\partial\Omega_0$ qui

est défini par l'équation (cf. Fig. 4.2):

$$z = z_0$$

Par suite, la pression $p_0(\vec{r})$ induite par les sources primaires sur $\partial\Omega_0$ ne varie qu'en fonction des coordonnées d'espace x et y . Le choix d'une surface plane n'est cependant pas restrictif, au sens où, quelle que soit la géométrie de $\partial\Omega_0$, il est toujours possible de lui associer un système d'axes qui permette de se ramener à cette configuration.

On définit alors le spectre spatial $P_{0_{2D}}$ de p_0 comme sa transformée de Fourier bidimensionnelle appliquée sur les variables d'espace (x, y) :

$$P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} p_0(x, y, z_0) e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} dx dy \quad (4.6)$$

Aux coordonnées d'espace (x, y) , la transformée de Fourier associe dans l'espace dual le couple de variables (χ_x, χ_y) qui définissent le vecteur $\vec{\chi}(\chi_x, \chi_y)$. Ce vecteur $\vec{\chi}$ exprime une *fréquence spatiale*. Ses coordonnées (χ_x, χ_y) sont homogènes à des *pulsations spatiales*, équivalentes à la pulsation temporelle $\omega = 2\pi f$ obtenue par une transformée de Fourier unidimensionnelle appliquée à un signal temporel:

$$\begin{aligned} P(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les variables (χ_x, χ_y) correspondent donc à des *pulsations spatiales* par opposition à la pulsation temporelle ω .

Une transformée de Fourier bidimensionnelle inverse appliquée au spectre $P_{0_{2D}}$ redonne la pression p_0 initiale:

$$p_0(x, y, z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y) e^{j(\chi_x x + \chi_y y)} d\chi_x d\chi_y \quad (4.8)$$

Or, sous l'intégrand, le terme:

$$P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y) e^{j(\chi_x x + \chi_y y)}$$

s'identifie à une onde plane de vecteur d'onde $\vec{\chi}(\chi_x, \chi_y)$ et d'amplitude $P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y)$:

$$P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y) e^{j(\chi_x x + \chi_y y)} = P_{0_{2D}}(\vec{\chi}) e^{j\vec{\chi} \cdot \vec{r}}$$

On se rend ainsi compte qu'appliquer une transformée de Fourier à la pression p_0 revient à la *décomposer en une superposition d'ondes planes*. D'un point de vue physique, le vecteur $\vec{\chi}$ s'identifie donc à un *vecteur d'onde* et le spectre $P_{0_{2D}}(\vec{\chi})$ décrit les amplitudes des ondes planes de vecteur d'onde $\vec{\chi}$ contenues dans la pression p_0 .

4.2.2 Spectre d'une onde plane

Afin de vérifier l'interprétation précédente, nous allons calculer le spectre d'une onde plane d'amplitude a et de vecteur d'onde $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$. La pression qu'elle induit en un point \vec{r} est décrit par [Bruneau, 1983]:

$$p_0(\vec{r}) = a_p e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.9)$$

En vertu de l'équation 4.6, son spectre spatial est donné par:

$$\begin{aligned} P_{0_{2D}}(\vec{\chi}) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} a_p e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}_0} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} a_p e^{j(k_x x + k_y y + k_z z_0)} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} dx dy \\ &= a_p e^{jk_z z_0} \delta(\chi_x - k_x) \delta(\chi_y - k_y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

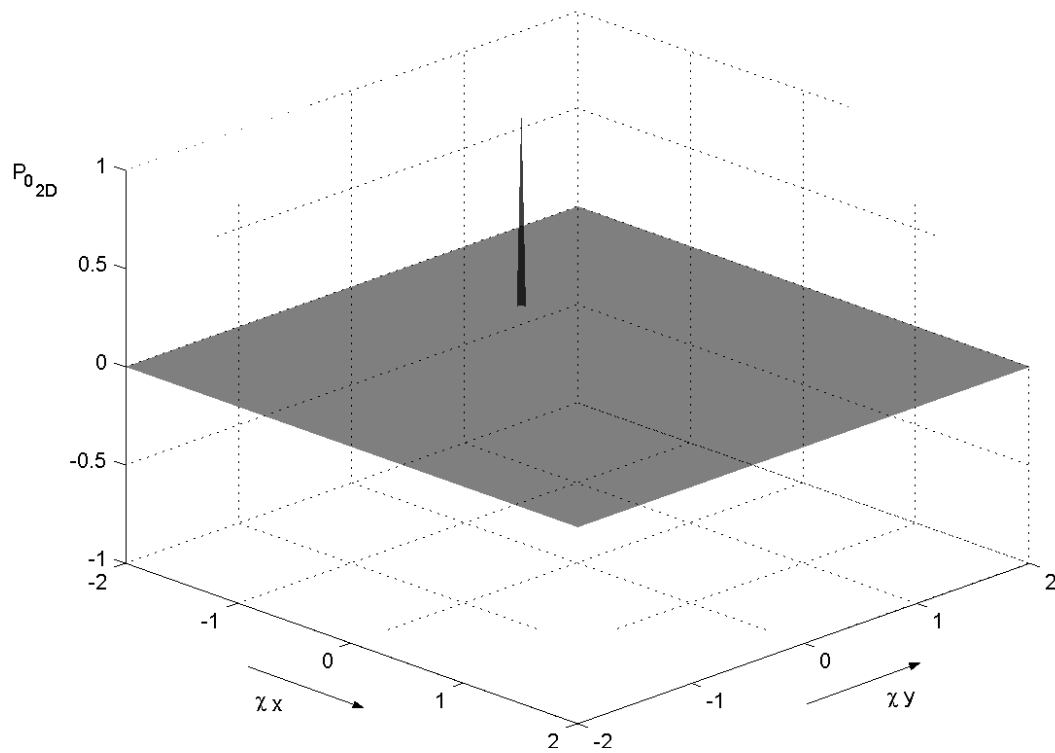


FIG. 4.3 - Spectre spatial d'une onde plane $p_0(\vec{r}) = a_p e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$: Représentation symbolique d'une distribution de Dirac en $\vec{\chi}(k_x = -0.5, k_y = 0.25)$

Le spectre d'une onde plane est donc représenté par une distribution de Dirac localisée au point $\vec{\chi}(k_x, k_y)$, de la même façon qu'une transformée de Fourier appliquée à un signal sinusoïdal de fréquence f_0 :

$$s(t) = a e^{j2\pi f_0 t}$$

donne une distribution de Dirac localisée à la fréquence $f = f_0$:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= a \delta(f - f_0) \end{aligned}$$

En d'autres termes, étant donné qu'une transformée de Fourier spatiale s'identifie à une décomposition en ondes planes, le spectre spatial d'une onde plane ne comporte bien qu'une composante (cf. Fig. 4.3): une onde plane dont le vecteur d'onde $\vec{\chi}(k_x, k_y)$ correspond à la projection du vecteur d'onde de l'onde plane \vec{k} sur la surface $\partial\Omega_0$.

4.2.3 Spectre d'une onde sphérique

Considérons maintenant une source acoustique monopolaire située à l'origine du repère et qui émet un signal sinusoïdal d'amplitude a et de fréquence f . La pression qu'elle induit en un point $\vec{r}(x, y, z)$ est une onde sphérique qui s'exprime par:

$$p_0(\vec{r}) = a_s \frac{e^{jk|\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}|} \quad (4.11)$$

où k est le nombre d'onde défini par:

$$k = \frac{2\pi f}{c}$$

Son spectre spatial est donné par l'équation 4.6:

$$\begin{aligned} P_{0_{2D}}(\vec{\chi}) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} a_s \frac{e^{jk|\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}|} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} a_s \frac{e^{jk\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} dx dy \end{aligned} \quad (4.12)$$

Spectre 3D

Au calcul direct des deux intégrales, on préfère une méthode indirecte¹ qui consiste à déduire le spectre $P_{0_{2D}}$ du spectre $P_{0_{3D}}$ qui est obtenu en appliquant une transformée de Fourier tridimensionnelle sur les trois coordonnées d'espace (x, y, z) :

$$\begin{aligned} P_{0_{3D}}(\chi_x, \chi_y, \chi_z) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} p_0(\vec{r}) e^{-j(\chi_x x + \chi_y y + \chi_z z)} dx dy dz \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} a_s \frac{e^{jk\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y + \chi_z z)} dx dy dz \end{aligned} \quad (4.13)$$

En substituant les coordonnées sphériques (r, φ, θ) aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) , le calcul de $P_{0_{3D}}$ est immédiat si on tient compte des propriétés de symétrie de la pression monopolaire p_0 [Johnson & Dudgeon, 1993] (cf. Annexe G). Il vient:

$$P_{0_{3D}}(\chi_x, \chi_y, \chi_z) = \frac{a_s \pi}{j2\chi} \delta(\chi - k) + \frac{a_s}{\chi^2 - k^2} \quad (4.14)$$

avec:

$$\chi = |\vec{\chi}|$$

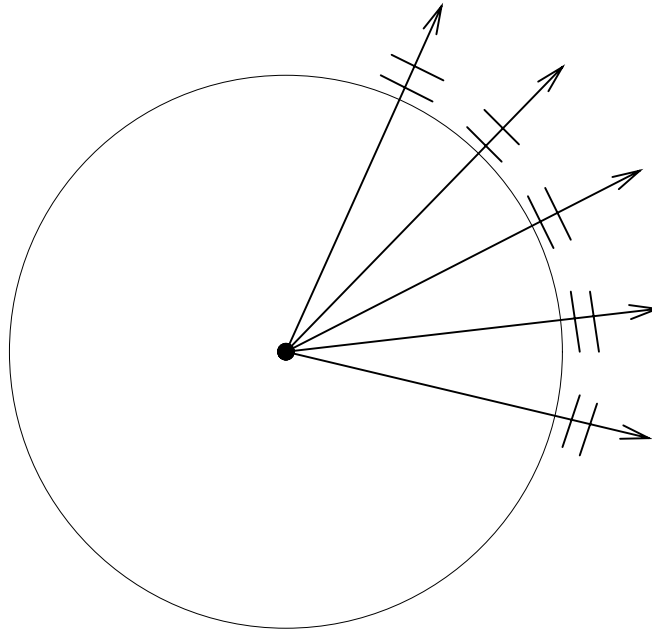


FIG. 4.4 - Décomposition d'un front d'onde sphérique en une infinité de fronts d'ondes planes élémentaires

Ce spectre se compose d'un premier terme qui est associé à une distribution de Dirac $\delta(\chi - k)$. Il s'interprète comme la superposition d'une infinité d'ondes planes de même amplitude:

$$a = \frac{a\pi}{j2\chi}$$

et dont les vecteurs d'onde décrivent la surface d'une sphère centrée sur l'origine et de rayon k . Par suite, une onde sphérique se décompose en une infinité d'ondes planes se propageant dans toutes les directions avec un nombre d'onde constant et égal à $\chi = |\vec{\chi}| = k$. Ce résultat est conforme à une approche intuitive du phénomène, selon laquelle un front d'onde sphérique est *localement plan*, ce qui permet de le décomposer en une infinité de front d'ondes plans élémentaires (cf. Fig. 4.4). En première approximation, on peut donc assimiler le support du spectre $P_{0_{3D}}$ d'un monopôle à la surface de la sphère de rayon k .

Cependant, en toute rigueur, il faut aussi tenir compte du second terme qui intervient dans l'expression de $P_{0_{3D}}$ (cf. Equ. 4.14):

$$\frac{a_s}{\chi^2 - k^2}$$

Ce dernier traduit la présence de composantes en dehors de la surface de la sphère de rayon k , mais leur amplitude décroît rapidement, plus exactement en raison inverse de $(\chi^2 - k^2)$, dès qu'on s'écarte de la surface de la sphère. Par suite, même si le spectre spatial d'une onde sphérique s'étend théoriquement à tout l'espace, on pourra considérer en bonne approximation qu'il se limite à la surface de la sphère de rayon k et à son voisinage immédiat.

1. On se reportera à l'annexe G pour le détail des calculs du spectre $P_{0_{2D}}$.

Spectre 2D

Par transformée de Fourier inverse, on exprime la pression de l'onde sphérique à partir de son spectre $P_{0_{3D}}$:

$$\begin{aligned} p_0(\vec{r}) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} P_{0_{3D}}(\chi'_x, \chi'_y, \chi'_z) e^{j(\chi'_x x + \chi'_y y + \chi'_z z)} d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_s \pi}{j^2 \chi'} \delta(\chi' - k) + \frac{a_s}{\chi'^2 - k^2} \right] e^{j(\chi'_x x + \chi'_y y + \chi'_z z)} d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z \end{aligned} \quad (4.15)$$

On remplace p_0 par cette expression dans le calcul du spectre $P_{0_{2D}}$ (cf. Equ. 4.12) et il vient (cf. Annexe G):

$$\begin{aligned} P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y) &= \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} P_{0_{3D}}(\chi'_x, \chi'_y, \chi'_z) e^{j(\chi'_x x + \chi'_y y + \chi'_z z_0)} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z dx dy \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} P_{0_{3D}}(\chi'_x, \chi'_y, \chi'_z) e^{j\chi'_z z_0} \delta(\chi'_x - \chi_x) \delta(\chi'_y - \chi_y) d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_{0_{3D}}(\chi_x, \chi_y, \chi'_z) e^{j\chi'_z z_0} d\chi'_z \end{aligned} \quad (4.16)$$

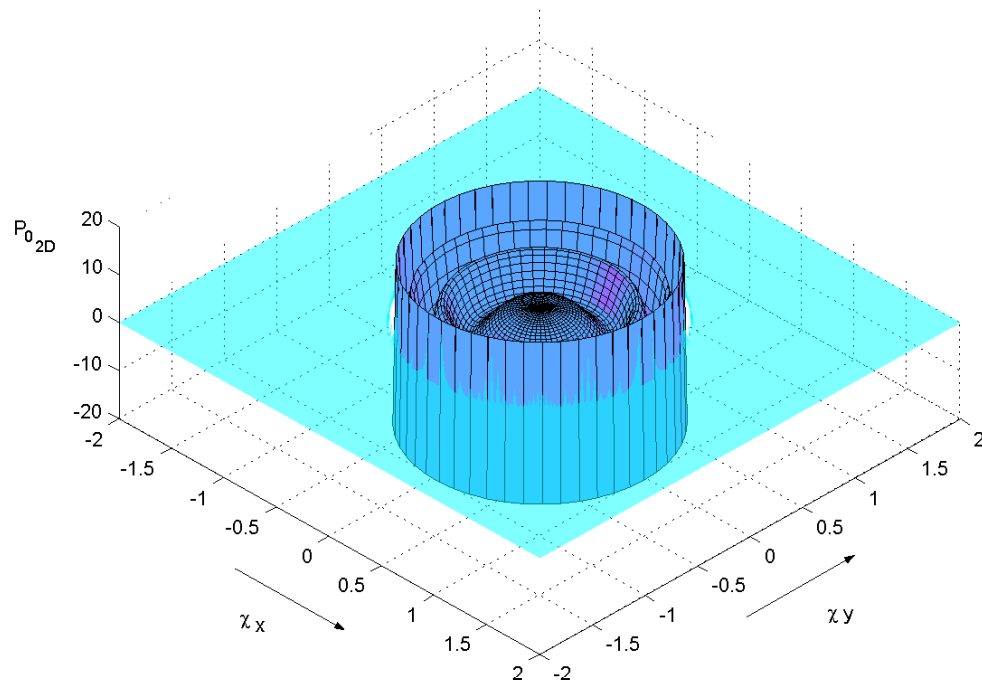
Par suite, le spectre $P_{0_{2D}}$ se calcule comme la transformée de Fourier du spectre $P_{0_{3D}}$ appliquée sur sa troisième variable χ'_z :

$$\begin{aligned} P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_s \pi}{j^2 \chi'} \delta(\chi' - k) + \frac{a_s}{\chi'^2 - k^2} \right] e^{j\chi'_z z_0} d\chi'_z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_s \pi}{j^2 \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2}} \delta(\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2} - k) + \frac{a_s}{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2 - k^2} \right] e^{j\chi'_z z_0} d\chi'_z \end{aligned} \quad (4.17)$$

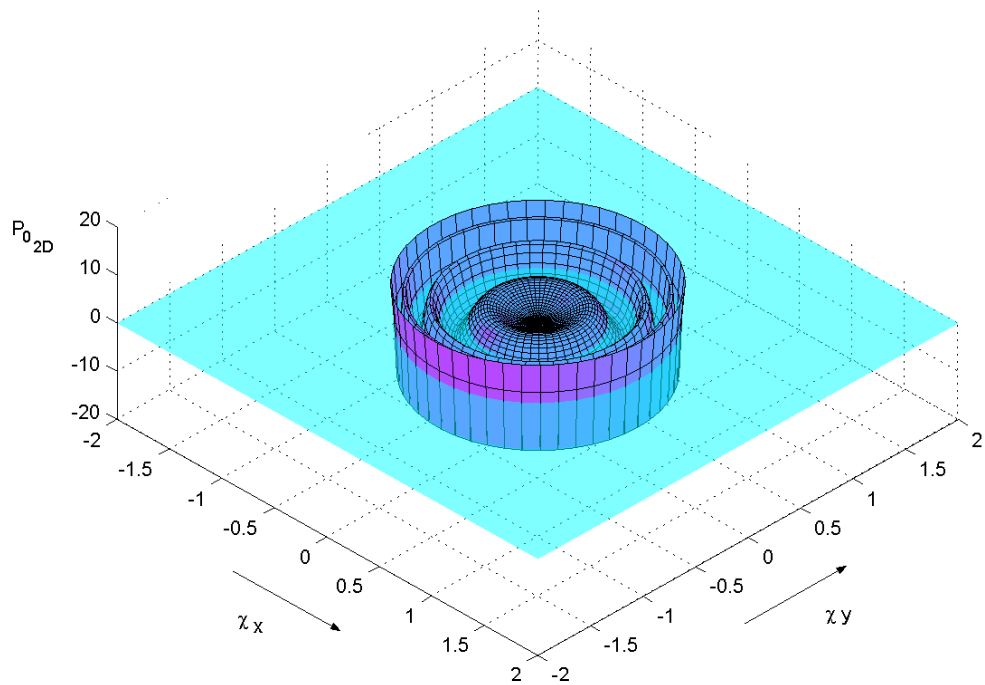
Cette intégrale peut être exprimée en appliquant les propriétés de la distribution de Dirac d'une part et en utilisant les tables des transformées de Fourier d'autre part (cf. Annexe G). Il faut distinguer trois cas:

$$P_{0_{2D}}(\chi_x, \chi_y) = \begin{cases} \pi \frac{e^{-j\sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2}|z_0|}}{\sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2}} & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} < k \\ \pi |z_0| & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} = k \\ \pi \frac{e^{-\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 - k^2}|z_0|}}{\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 - k^2}} & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} > k \end{cases} \quad (4.18)$$

Ces relations définissent le spectre $P_{0_{2D}}$ d'une onde sphérique dans tout le plan des vecteurs d'onde $\vec{\chi}(\chi_x, \chi_y)$. Ce spectre s'étend à tout le plan, mais un examen attentif de l'équation 4.18 révèle qu'en première approximation, son support se limite à un disque de rayon $|\vec{\chi}| = k$, délimité par le nombre d'onde k (cf. Fig. 4.5). Les composantes situées à l'extérieur du disque — cas où $\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} > k$ dans l'équation 4.18 — présentent en effet une amplitude qui décroît exponentiellement au fur et à mesure qu'on s'écarte du cercle de rayon k , la décroissance étant d'autant plus forte que le plan $\partial\Omega_0$ s'éloigne de la source monopolaire, c'est-à-dire que le terme $|z_0|$ est grand. En revanche, à l'intérieur du disque — cas où $\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} < k$ dans l'équation 4.18 —, l'amplitude des composantes est une exponentielle complexe amortie qui, à partir du bord du disque défini par le cercle de rayon k , oscille avec une amplitude décroissante lorsqu'on se rapproche de l'origine $\vec{\chi}(0, 0)$ (cf. Fig. 4.5). Il en ressort que la contribution des composantes situées à l'intérieur du disque et sur son bord prédomine et que les composantes présentes à l'extérieur du disque sont négligeables. Ce résultat n'est pas surprenant si on considère que le spectre $P_{0_{2D}}$ est la projection du spectre $P_{0_{3D}}$ sur le plan $\chi_z = 0$. Attendu que le support de ce dernier est une sphère centrée sur l'origine et de rayon k , cette sphère se projette bien sur le plan sous la forme d'un disque de rayon k . Le spectre $P_{0_{2D}}$ d'une onde sphérique se compose donc principalement d'ondes planes se propageant dans toutes les directions avec un nombre d'onde

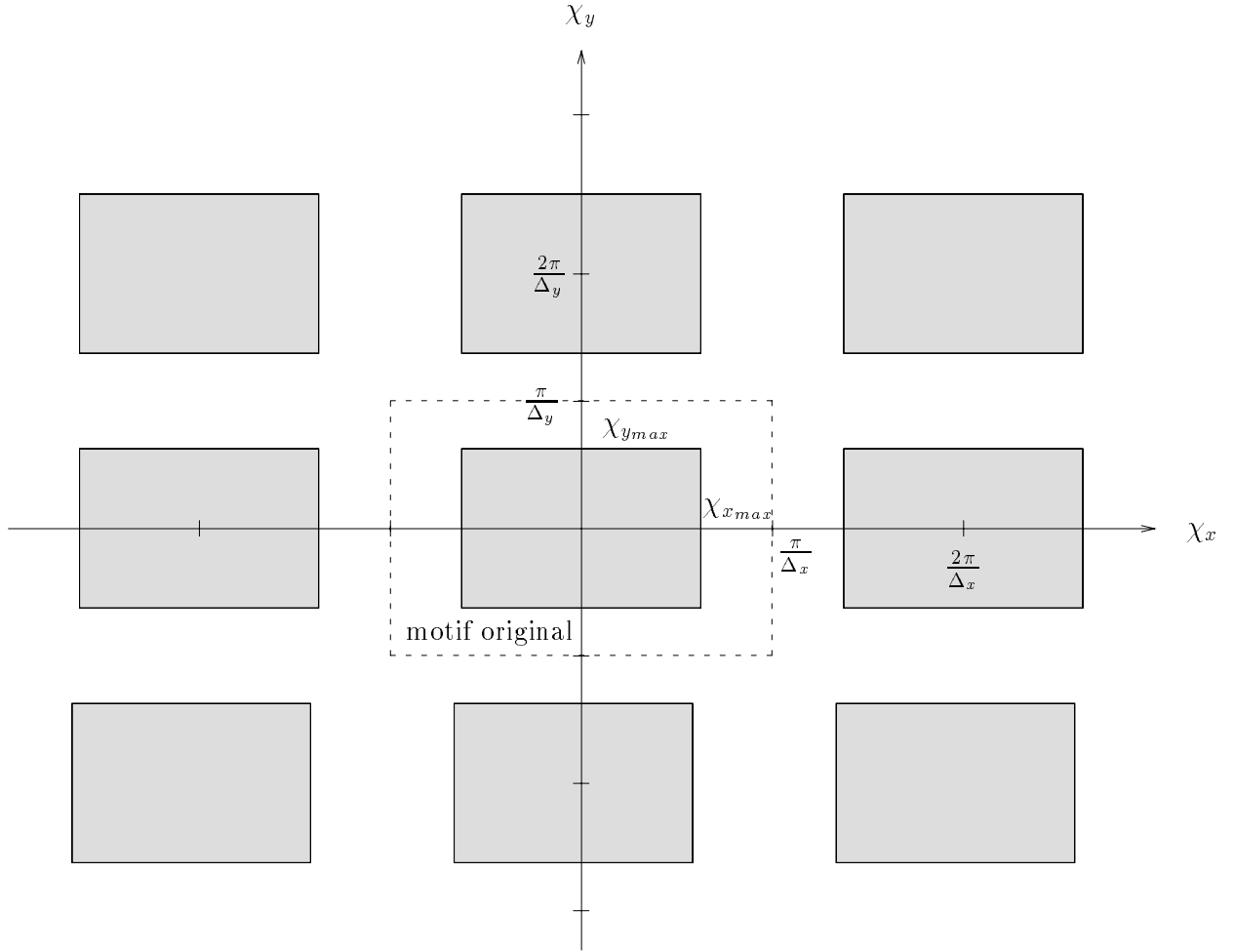


(a) Partie réelle



(b) Partie imaginaire

FIG. 4.5 - Spectre spatial d'une onde sphérique $p_0(\vec{r}) = a_s \frac{e^{jkr}}{4\pi r}$ ($k = 1, z_0 = 25$)


 FIG. 4.6 - Echantillonnage spatial de la pression p_0 : Périodisation du spectre $P_0(\chi_x, \chi_y)$

$|\vec{\chi}| = \chi$ compris entre 0 et k . On note cependant qu'en seconde approximation, les composantes situées sur le cercle de rayon k , c'est-à-dire les ondes planes de nombre d'onde k , sont prépondérantes puisqu'elles correspondent au maximum du spectre, ce qui réduit le support du spectre au cercle de rayon k .

4.2.4 Condition de Shannon

La notion de spectre spatial vient d'être illustrée autour des exemples de l'onde plane et de l'onde sphérique. Or, lorsque la pression p_0 induite sur la surface $\partial\Omega_0$ est échantillonnée, son spectre est modifié. Plus précisément, l'action d'échantillonner le signal de pression $p_0(x, y)$ dans le domaine des coordonnées d'espace (x, y) , qui correspond à une *multiplication* par un peigne de Dirac:

$$p_{0_e}(x, y) = p_0(x, y, z_0) \Delta_x \Delta_y \times \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta_x) \delta(y - n\Delta_y) \right] \quad (4.19)$$

se traduit dans le domaine dual des pulsations spatiales (χ_x, χ_y) par une *convolution* du spectre spatial par

un peigne de Dirac:

$$\begin{aligned} P_{0_e}(\chi_x, \chi_y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} p_{0_e}(x, y) e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} dx dy \\ &= P_0(\chi_x, \chi_y) * \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\chi_x - m \frac{2\pi}{\Delta_x}\right) \delta\left(\chi_y - n \frac{2\pi}{\Delta_y}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Cette convolution équivaut à *périodiser* le spectre: par suite, le spectre P_{0_e} de la pression échantillonnée correspond au spectre P_0 périodisé à la fois selon l'axe $o\tilde{\chi}_x$ avec une période $\frac{2\pi}{\Delta_x}$ et selon l'axe $o\tilde{\chi}_y$ avec une période $\frac{2\pi}{\Delta_y}$. Le motif initial du spectre P_0 se trouve donc répliqué autour des points (cf. Fig. 4.6):

$$\tilde{\chi} \left\{ \begin{array}{l} \chi_x = m \frac{2\pi}{\Delta_x} \\ \chi_y = n \frac{2\pi}{\Delta_y} \end{array} \right\} \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$$

Si le spectre initial P_0 possède un support fini, inclus à l'intérieur d'un rectangle défini par (cf. Fig. 4.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\chi_{x_{max}} < \chi_x < \chi_{x_{max}} \\ -\chi_{y_{max}} < \chi_y < \chi_{y_{max}} \end{array} \right.$$

la périodisation du spectre ne pose pas de problème tant qu'on a soin de choisir les pas d'échantillonnage Δ_x et Δ_y tels que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x < \frac{\pi}{\chi_{x_{max}}} \\ \Delta_y < \frac{\pi}{\chi_{y_{max}}} \end{array} \right. \quad (4.21)$$

afin d'éviter tout recouvrement entre les motifs périodiques adjacents (cf. Fig. 4.6). Ces relations expriment la *condition de Shannon* sur le choix du pas d'échantillonnage dans le cas d'un échantillonnage spatial à deux dimensions. Elles imposent une valeur maximale au pas d'échantillonnage qui doit être inférieur à la plus petite période de variation spatiale du signal de pression p_0 pour que le signal une fois échantillonné soit capable de les reproduire. Lorsque le spectre n'a pas de support fini, le chevauchement entre les motifs spectraux est inévitable et il se produit un phénomène de *repliement de spectre* qui sera étudié plus loin (cf. Section 4.3). A présent, nous allons appliquer ces résultats au cas de l'onde plane et de l'onde sphérique dont nous avons exprimé précédemment les spectres spatiaux.

Onde plane

Dans le cas de l'*onde plane*, le support du spectre spatial associé est *fini*: il se limite d'ailleurs à un point, le point de coordonnées $\tilde{\chi}(k_x, k_y)$ (cf. Equ. 4.10 & Fig. 4.3). Si on représente le vecteur d'onde par ses coordonnées sphériques $\tilde{k}(k, \varphi_p, \theta_p)$ (cf. Fig. 4.7), la condition de Shannon se traduit par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_x < \frac{\lambda}{2 \sin \theta_p \cos \varphi_p} \\ \Delta_y < \frac{\lambda}{2 \sin \theta_p \sin \varphi_p} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

où λ désigne la longueur d'onde:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Le pas d'échantillonnage doit donc être choisi non seulement en fonction de la longueur d'onde, c'est-à-dire de la *fréquence temporelle* du signal sonore, mais aussi en fonction de l'*incidence* de l'onde plane. Ainsi, pour une onde arrivant selon la direction normale à la surface $\partial\Omega_0$ — cas où l'angle (φ_p, θ_p) vaut $(0, 0)$ —, le pas d'échantillonnage maximal dans les deux directions est infini, ce qui signifie qu'on peut se contenter d'un seul point d'échantillonnage (cf. Fig. 4.8). En ce cas, la surface $\partial\Omega_0$ coïncide en effet avec un front d'onde de l'onde plane, c'est-à-dire que la pression p_0 est constante sur cette surface. Par suite, il suffit de la connaître en un point pour le connaître partout. Cette situation correspond au cas le moins restrictif. A l'opposé, la situation la plus contraignante se rencontre lorsque l'onde se propage parallèlement

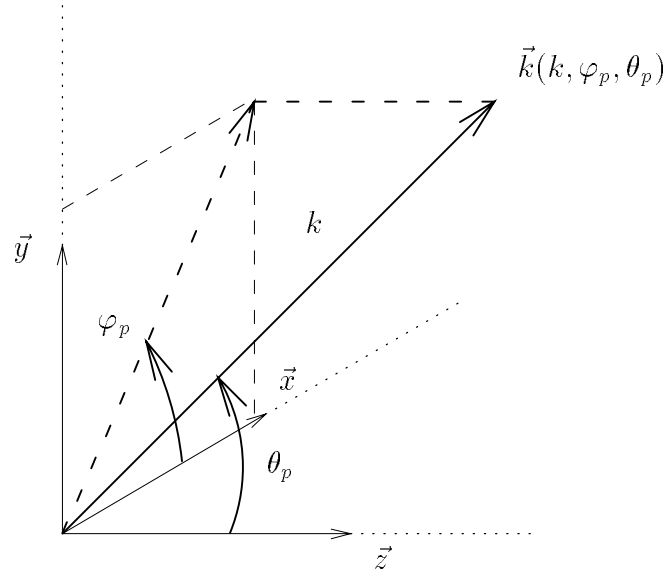


FIG. 4.7 - Coordonnées sphériques pour le vecteur d'onde \vec{k}

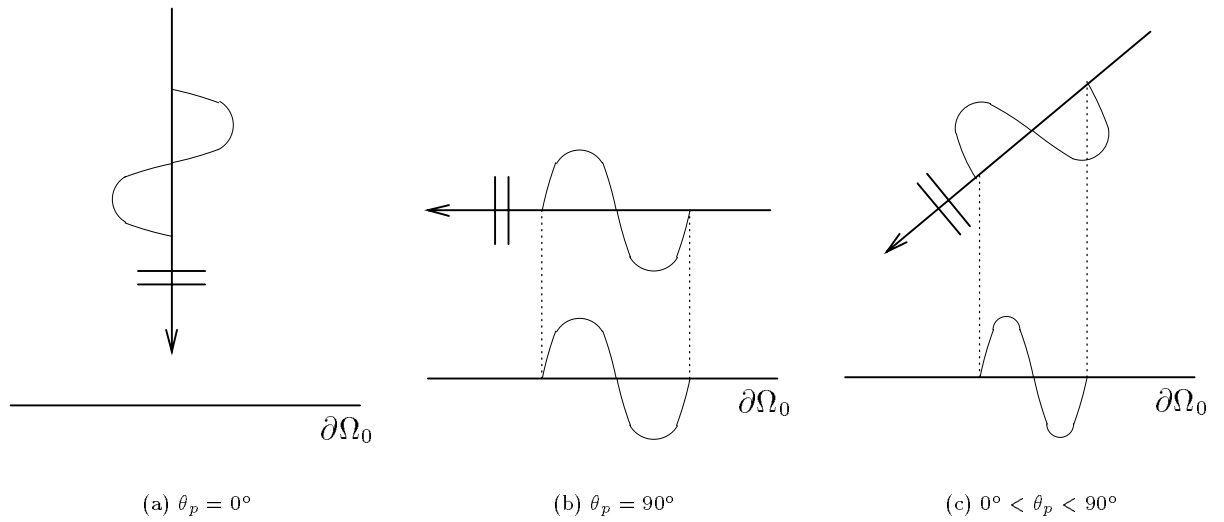


FIG. 4.8 - Pas d'échantillonnage et incidence de l'onde plane

à la surface $\partial\Omega_0$, par exemple selon l'axe \vec{x} — cas où l'angle (φ_p, θ_p) vaut $(\frac{\pi}{2}, 0)$ — (cf. Fig. 4.8b). Le pas d'échantillonnage maximal imposé par la condition de Shannon pour la direction \vec{x} vaut alors $\frac{\lambda}{2}$. Pour la direction \vec{y} , le pas d'échantillonnage reste néanmoins infini. Pour les incidences intermédiaires entre ces deux cas limites, la valeur maximale du pas d'échantillonnage prend une valeur finie supérieure à la valeur critique $\frac{\lambda}{2}$ et qui est déterminée par la *projection de la longueur d'onde λ sur la surface $\partial\Omega_0$* (cf. Fig. 4.8). Cependant, dans le cas d'un enregistrement réel, attendu que l'incidence de l'onde n'est pas connue a priori, il convient de se placer dans l'hypothèse la plus défavorable. On optera donc pour un pas d'échantillonnage identique selon les deux directions et vérifiant :

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta < \frac{\lambda}{2} \quad (4.23)$$

Par ailleurs, on a considéré jusqu'à présent une onde monochromatique de fréquence f . Dans le cas plus général d'une onde plane dont le spectre s'étend à une bande de fréquences $[f_{min}, f_{max}]$, le spectre spatial n'est plus un point, mais un segment de droite limité par les points de coordonnées :

$$\begin{cases} \vec{\chi}_1(\frac{\lambda_{min}}{2 \sin \theta_p \cos \varphi_p}, \frac{\lambda_{min}}{2 \sin \theta_p \sin \varphi_p}) \\ \vec{\chi}_2(\frac{\lambda_{max}}{2 \sin \theta_p \cos \varphi_p}, \frac{\lambda_{max}}{2 \sin \theta_p \sin \varphi_p}) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} \\ \lambda_{max} = \frac{c}{f_{min}} \end{cases}$$

Le pas d'échantillonnage est alors imposé par la fréquence maximale contenue dans le spectre temporel de l'onde :

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta < \frac{\lambda_{min}}{2} = \frac{c}{2f_{max}} \quad (4.24)$$

Onde sphérique

Contrairement à l'onde plane, le support du spectre spatial de l'onde sphérique n'est pas fini, mais s'étend à tout le plan (χ_x, χ_y) (cf. Equ. 4.18). Cependant, on a vu qu'il était possible de considérer en bonne approximation, qu'il se limitait à un disque centré sur l'origine et de rayon χ égal au nombre d'onde k dans le cas d'une onde monochromatique. Pour échantillonner une onde sphérique, on choisira donc un pas d'échantillonnage identique selon les deux directions tel que :

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta < \frac{\lambda}{2} \quad (4.25)$$

On se ramène au cas d'une onde plane d'incidence indéterminée.

Si la source monopolaire n'émet pas une onde monochromatique, mais présente un spectre temporel étendu à une bande de fréquences $[f_{min}, f_{max}]$, le support du spectre spatial est représenté par un disque de rayon :

$$\chi = k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}}$$

Il faut alors se donner un pas d'échantillonnage en fonction de la fréquence maximale présente dans le spectre temporel de la source :

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta < \frac{\lambda_{min}}{2} = \frac{c}{2f_{max}} \quad (4.26)$$

En pratique, le champ sonore induit par une source acoustique ne correspond ni à une onde plane, ni à une onde sphérique. Si on se place suffisamment loin de la source pour s'affranchir des phénomènes de champ proche, la pression rayonnée peut être modélisée par :

$$p_0(\vec{r}) = a h(\varphi, \theta) \frac{e^{jkr}}{r} \quad (4.27)$$

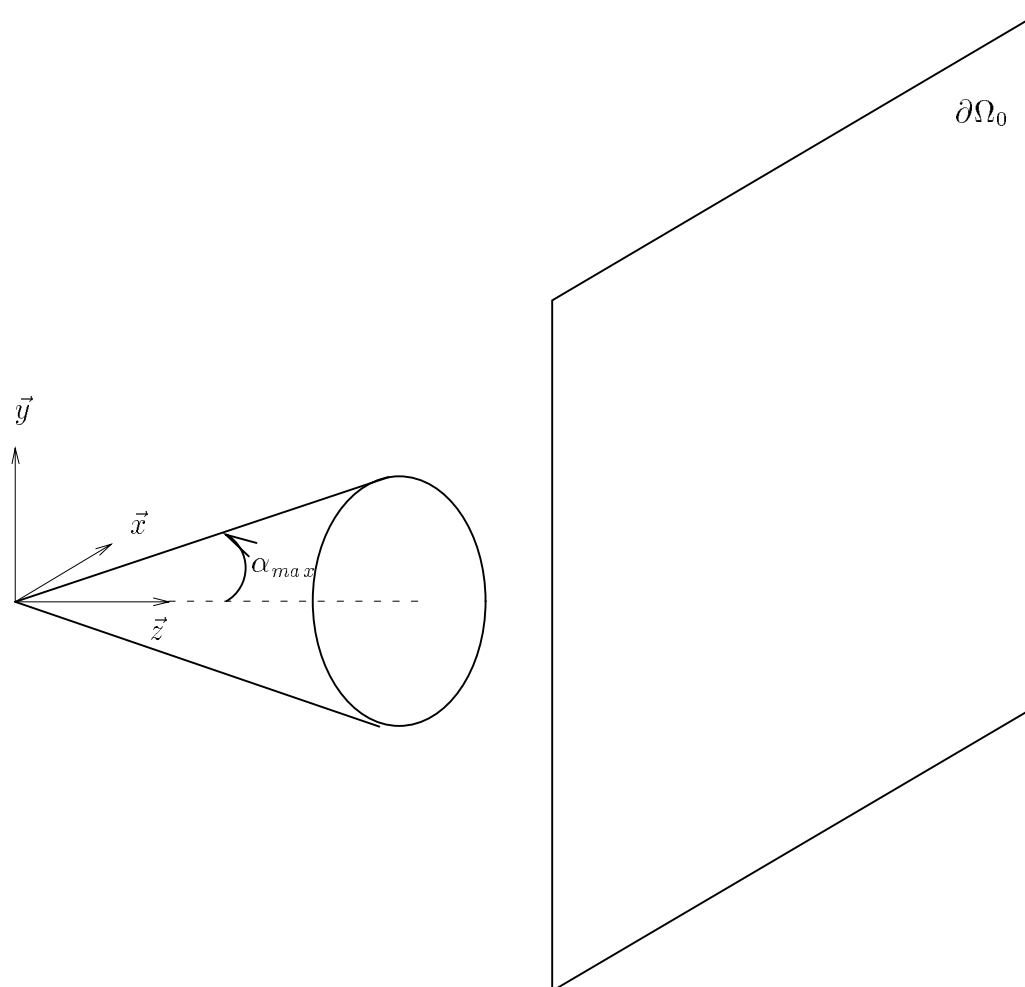


FIG. 4.9 - Directivité d'une source et spectre spatial

où la fonction $h(\varphi, \theta)$ désigne sa fonction de directivité. Sans calculer le spectre spatial associé, on est capable d'en exprimer les principales propriétés à partir de l'analyse précédente effectuée sur une onde sphérique. En effet, on pressent intuitivement que, comme pour la source monopolaire omnidirective, le spectre spatial d'une source directive se compose d'une infinité d'ondes planes de nombre d'onde k se propageant dans toutes les directions (φ, θ) pour $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi]$, mais dont les amplitudes sont cette fois pondérées par la fonction de directivité $h(\varphi, \theta)$. Par suite, la fonction de directivité de la source intervient comme un *filtre* qui limite le support du spectre spatial de la pression sonore rayonnée, c'est-à-dire qui en réduit la bande passante spectrale spatiale. Ainsi, considérons une source unidirective dont la direction d'émission privilégiée est parallèle à l'axe \vec{z} , c'est-à-dire perpendiculaire à la surface $\partial\Omega_0$. On admet qu'elle ne rayonne qu'à l'intérieur d'un cône faisant un angle α_{max} avec l'axe \vec{z} (cf. Fig. 4.9). L'incidence des ondes sur la surface $\partial\Omega_0$ est ainsi limitée à l'angle α_{max} et la longueur d'onde projetée vaut, au minimum:

$$\lambda_{min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha_{max}} \quad (4.28)$$

ce qui augmente la valeur limite du pas d'échantillonnage dictée par la condition de Shannon jusqu'à:

$$\Delta < \frac{\lambda}{2 \sin \alpha_{max}} \quad (4.29)$$

au lieu de:

$$\Delta < \frac{\lambda}{2} \quad (4.30)$$

pour une source omnidirective. La directivité de la source primaire permet donc de relâcher la contrainte sur le pas d'échantillonnage. De manière équivalente, si on utilise des microphones unidirectifs pour enregistrer la pression p_0 le long de la surface $\partial\Omega_0$, la directivité des capteurs réduit l'incidence maximale des ondes perçues, ce qui se traduit par une limitation de la bande passante du spectre spatial du signal enregistré.

4.3 Repliement de spectre spatial

4.3.1 Phénomène de repliement

Pour une fréquence maximale f_{max} de 20 kHz, la condition de Shannon impose un pas d'échantillonnage maximal de (cf. Equ. 4.26):

$$f_{max} = 20 \text{ kHz} \Rightarrow \Delta > 8.5 \text{ mm}$$

avec $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$, la célérité des ondes acoustiques. Il est évident qu'une telle valeur est impossible à obtenir en pratique. D'une part, les dimensions des transducteurs — microphones à la prise de son et haut-parleurs à la restitution — ne permettent pas de les espacer de moins d'une dizaine de centimètres². D'autre part, plus le pas d'échantillonnage est petit, plus le nombre de transducteurs nécessaires pour couvrir la même surface augmente³.

Pour ces raisons, on se contente, en pratique, de réseaux de transducteurs espacés d'une dizaine de centimètres [Start, 1997], ce qui signifie que, dans le champ enregistré, les fréquences supérieures à:

$$f_{al} = \frac{c}{2\Delta} \quad (4.31)$$

2. En fait, le problème se pose principalement pour les haut-parleurs. Il est en effet impossible de réduire la taille du diaphragme du haut-parleur sans nuire à son rendement dans les basses fréquences. Le diamètre minimal pour une restitution sur une large gamme de fréquences est de l'ordre de 10 centimètres. A noter cependant qu'une nouvelle génération de transducteur basée sur des interférences de faisceaux ultrasonores [Humbert, 1997] propose des systèmes miniatures couvrant toute la bande audible [20 Hz - 20 kHz].

3. A titre d'exemple, considérons des sources secondaires réparties sur la surface d'une sphère de diamètre $D = 2 \text{ m}$. Le nombre de sources secondaires requises pour satisfaire la condition de Shannon peut être évalué par [Nelson, 1994]:

$$N = \frac{4\pi D^2}{\lambda^2}.$$

Ainsi, pour une fréquence de 1 kHz, plus de 400 sources sont nécessaires et à 10 KHz, il faut en compter 40000.

engendreront des repliements de spectre spatial. La relation 4.31 définit la valeur de la *fréquence d'aliasing*⁴ qui correspond à la limite fréquentielle à partir de laquelle des phénomènes de repliements spectraux se produisent. Pour un espacement de $\Delta = 10$ cm, la fréquence d'aliasing vaut:

$$\Delta = 10 \text{ cm} \Rightarrow f_{al} = 1.7 \text{ kHz}$$

Si la source primaire présente une directivité ou que des microphones unidirectifs sont utilisés, de façon à limiter l'angle d'incidence des ondes à α_{max} , la valeur de la fréquence d'aliasing est majorée à:

$$f_{al} = \frac{c}{2\Delta \sin \alpha_{max}} \quad (4.32)$$

Avec α_{max} fixé à 45° , on obtient ainsi pour un même espacement de $\Delta = 10$ cm:

$$\begin{cases} \Delta &= 10 \text{ cm} \\ \alpha_{max} &= 45^\circ \end{cases} \Rightarrow f_{al} \simeq 2.4 \text{ kHz}$$

Ces exemples numériques indiquent qu'en pratique, le repliement spectral se produit inévitablement dans les hautes fréquences. Les figures 4.11 et 4.12 illustrent le phénomène sur l'onde de pression restituée par une antenne rectiligne de $N = 100$ haut-parleurs espacés de $\Delta = 0.1$ m (cf. Fig. 4.10). Le réseau de sources secondaires tient compte des simplifications dégagées au chapitre 3, c'est-à-dire qu'il applique l'approximation de la phase stationnaire et qu'il se compose uniquement de sources monopolaires alimentées par des microphones bidirectifs. De plus, on considère une antenne de haut-parleurs suffisamment longue pour être assimilée à un réseau infini, c'est-à-dire que les ondes diffractées par les deux extrémités de l'antenne sont négligeables (cf. Chapitre 3). La source primaire est située à l'origine du repère en $s_1[0., 0., 0.]$. On compare l'onde de pression obtenue à deux fréquences: la fréquence $f_1 = 500$ Hz inférieure à la fréquence d'aliasing et la fréquence $f_2 = 2$ kHz supérieure à la fréquence d'aliasing. On observe sur la figure 4.12 que le repliement de spectre se traduit par l'apparition d'une onde résiduelle en aval du front d'onde. Ce signal résiduel est constitué d'ondes planes se propageant dans toutes les directions et qui correspondent aux fractions de spectre repliées par la périodisation. On identifie en effet la structure d'un champ d'interférences.

Sur le plan *perceptif*, le repliement spectral influe sur la *localisation* et la *largeur* apparentes des sources synthétisées, en même temps qu'il introduit des effets de *coloration de timbre* [Start, 1997]. En ce qui concerne la localisation des sources virtuelles, des tests psychoacoustiques menés à l'U.T.D. se sont intéressés à l'influence de la bande passante du signal d'excitation de la source primaire, en comparant trois situations:

- signal *Passe-Bas* dont le spectre temporel est limité aux fréquences inférieures à la fréquence d'aliasing f_{al} ,
- signal *Passe-Haut* dont le spectre temporel est limité aux fréquences supérieures à f_{al} ,
- signal *Large Bande* dont le spectre temporel inclut des composantes à la fois inférieures et supérieures à f_{al} .

Dans le premier cas, les performances de localisation sont identiques pour les sources réelles et virtuelles en environnement anéchoïque. Cependant, en présence d'un effet de salle, la localisation des sources virtuelles se dégrade légèrement par rapport aux sources réelles et s'avère être un peu moins précise. Pour des signaux *Passe-Haut*, la localisation des sources virtuelles est complètement faussée par le repliement de spectre spatial. Quelle que soit leur position, les sources sonores sont localisées sur le haut-parleur le plus proche. En revanche, dans le cas de signaux *Large Bande*, la localisation des sources virtuelles reste correcte, du moins tant que la fréquence d'aliasing est supérieure à 1.5 kHz. On sait en effet que, pour localiser les sources sonores, l'appareil auditif privilégie l'information contenues dans les composantes basses fréquences [Blauert, 1983]. Aussi, dès lors que ces composantes ne sont pas affectées par le repliement spectral, la qualité de la localisation est préservée.

Quant à la perception de la largeur des sources, l'équipe de l'U.T.D. a constaté que, de manière générale, la largeur apparente des sources virtuelles est supérieure à celle des sources réelles, comme si les erreurs de reconstruction — liées non seulement au repliement spectral, mais aussi à d'autres artefacts de la synthèse —

4. En anglais, le phénomène de repliement spectral est désigné par le terme d'"*aliasing*".

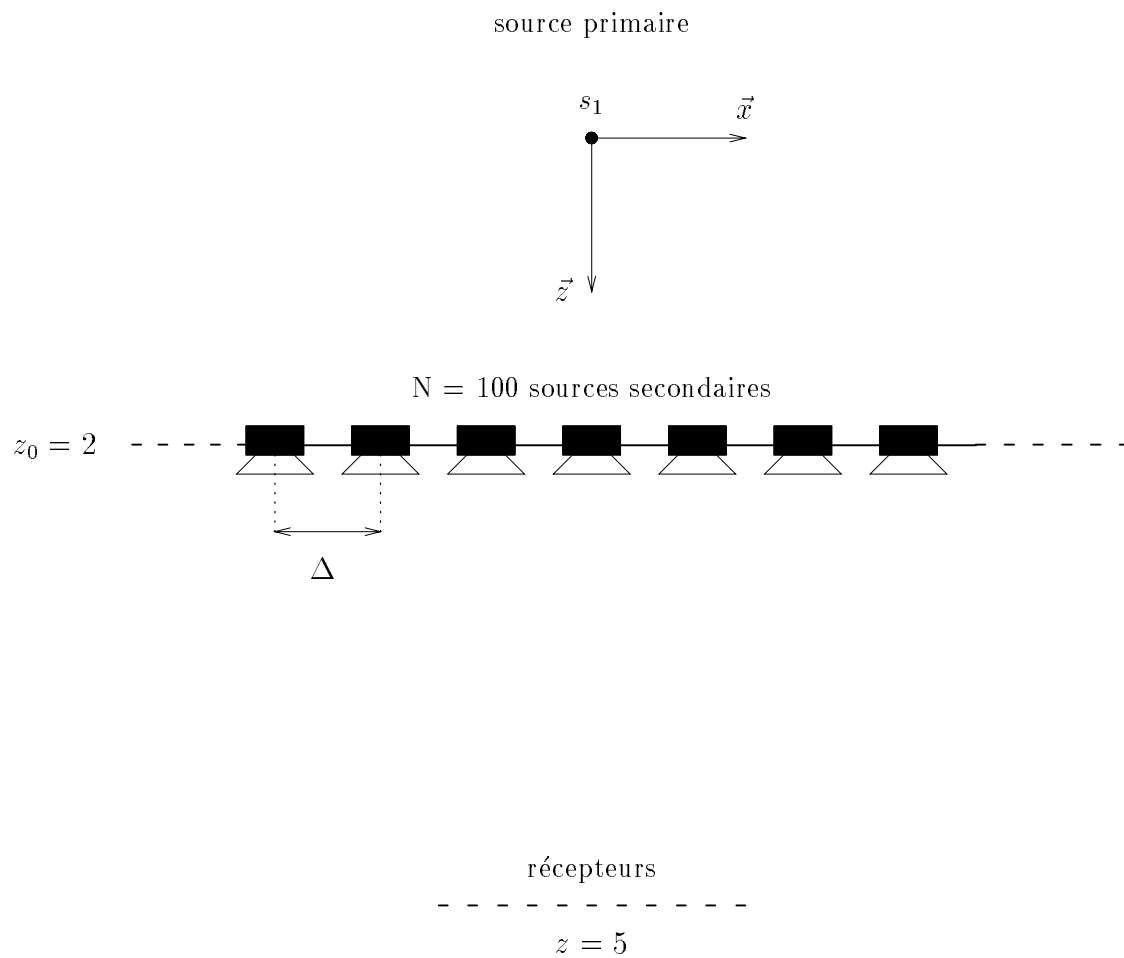


FIG. 4.10 - Simulation du phénomène de repliement spectral: Configuration de la source primaire, des sources secondaires et des récepteurs

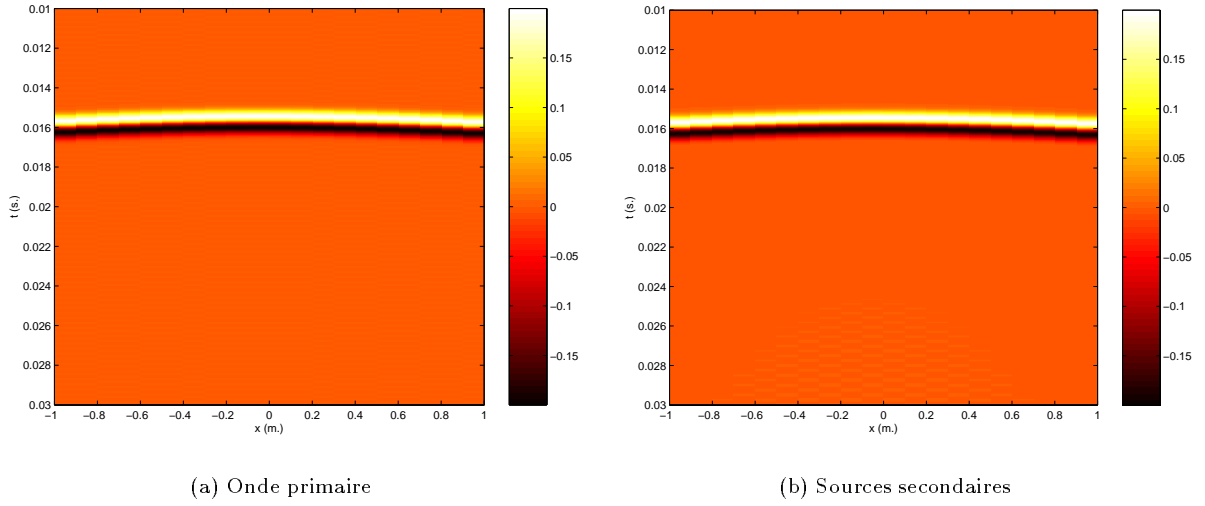


FIG. 4.11 - Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires à la fréquence $f_1 = 500 \text{ Hz} < f_{al}$: Absence de phénomène d'aliasing (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, récepteurs en $z = 5 \text{ m.}$, antenne rectiligne de longueur $l = 10 \text{ m.}$, espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1 \text{ m.}$, $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)

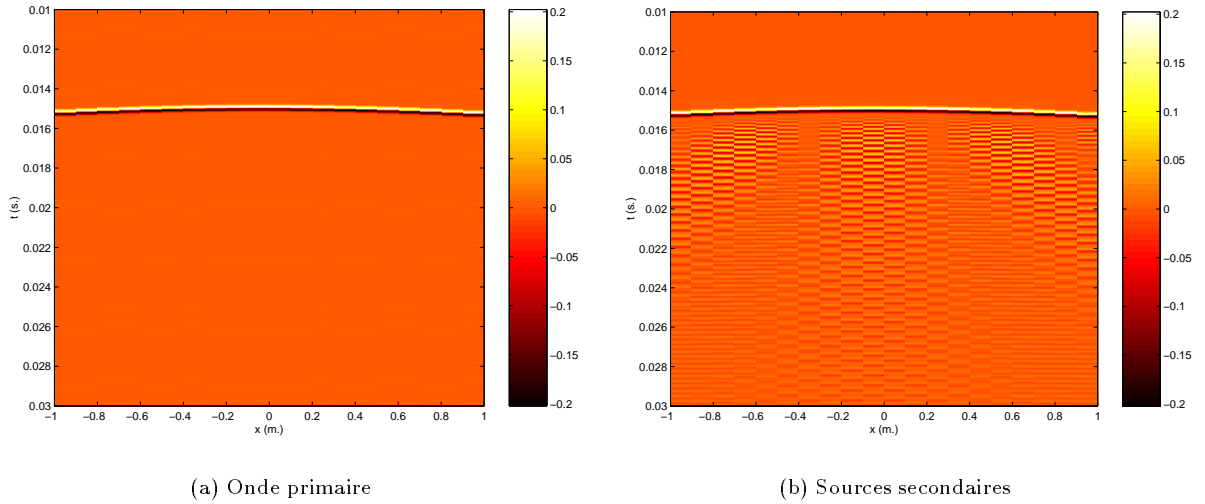


FIG. 4.12 - Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires à la fréquence $f_2 = 2 \text{ kHz} > f_{al}$: Mise en évidence du phénomène d'aliasing (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, récepteurs en $z = 5 \text{ m.}$, antenne rectiligne de longueur $l = 10 \text{ m.}$, espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1 \text{ m.}$, $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)

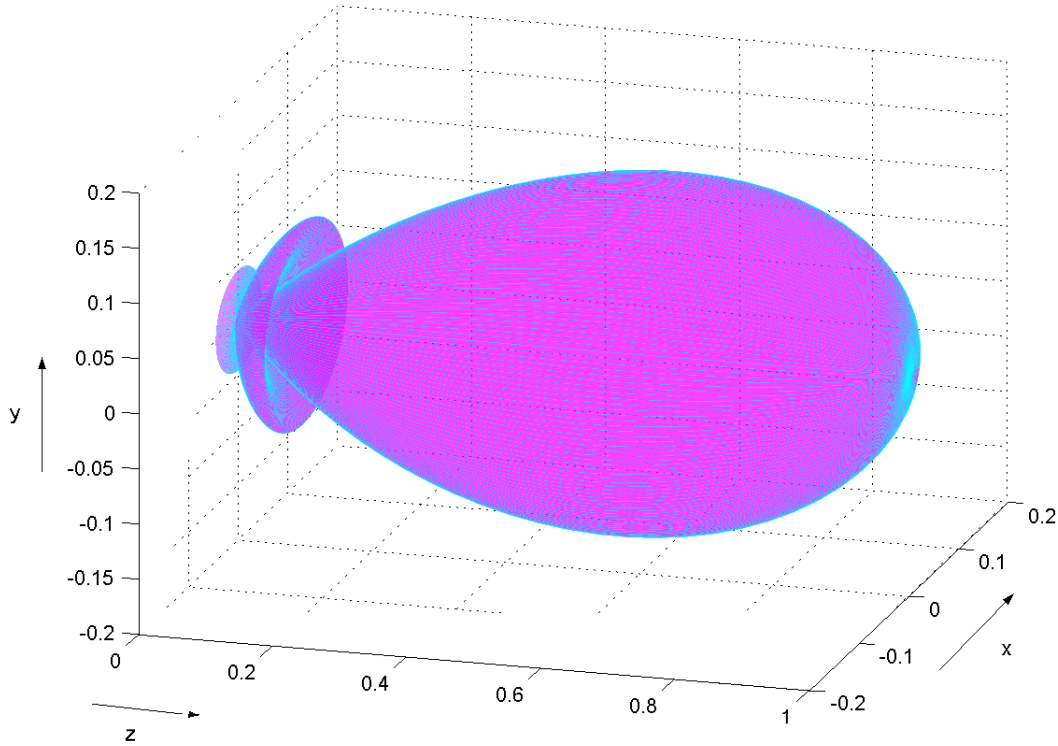


FIG. 4.13 - Source directive: Exemple de diagramme de directivité (cf. Equ. 4.33)

étaient interprétées au niveau perceptif comme un élargissement de la source. Le second effet du repliement de spectre réside dans les phénomènes de détimbrage du spectre temporel des sources [Start, 1997]. Le champ interférentiel généré par le repliement spectral et qui vient se superposer au front d'onde provoque des effets de filtrage en peigne qui modifient le spectre temporel de la source virtuelle. Le phénomène est d'autant plus sensible qu'il dépend de la position de la source primaire et de l'auditeur, c'est-à-dire que les colorations du timbre varient dès que la source ou l'auditeur se déplace. Il reste qu'en présence d'un effet de salle, la perception de ces phénomènes d'élargissement de source et de coloration du timbre est fortement atténuée. De plus, afin de rendre moins perceptibles les effets de repliement spectral, l'équipe de l'U.T.D. a proposé d'introduire des retards aléatoires entre les signaux émis par les différentes sources secondaires pour les hautes fréquences uniquement, de façon à détruire la périodicité du champ interférentiel créé par le phénomène de repliement spectral (cf. Fig. 4.12) [Start, 1997]. Ces tests d'écoute indiquent que cette méthode permet de réduire les effets de coloration, et surtout qu'elle contribue à rendre les modifications spectrales moins sensibles lorsque la source primaire ou l'auditeur se déplacent. Il existe une autre approche pour réduire le phénomène de repliement spectral. De portée plus générale, elle s'inspire du concept de *filtre anti-repliement* visant à limiter le support du spectre spatial afin de minimiser le chevauchement des motifs adjacents. Nous allons nous y intéresser à présent.

4.3.2 Filtre Anti-repliement

L'analyse des propriétés des spectres spatiaux effectuée à la section 4.2 établit que, pour réduire la taille du support du spectre spatial d'un champ sonore, on peut jouer sur:

- le spectre temporel $[f_{min}, f_{max}]$ des signaux émis en abaissant la valeur de la fréquence de coupure f_{max} ,
- l'incidence des ondes rayonnées à travers la directivité de la source primaire ou des microphones.

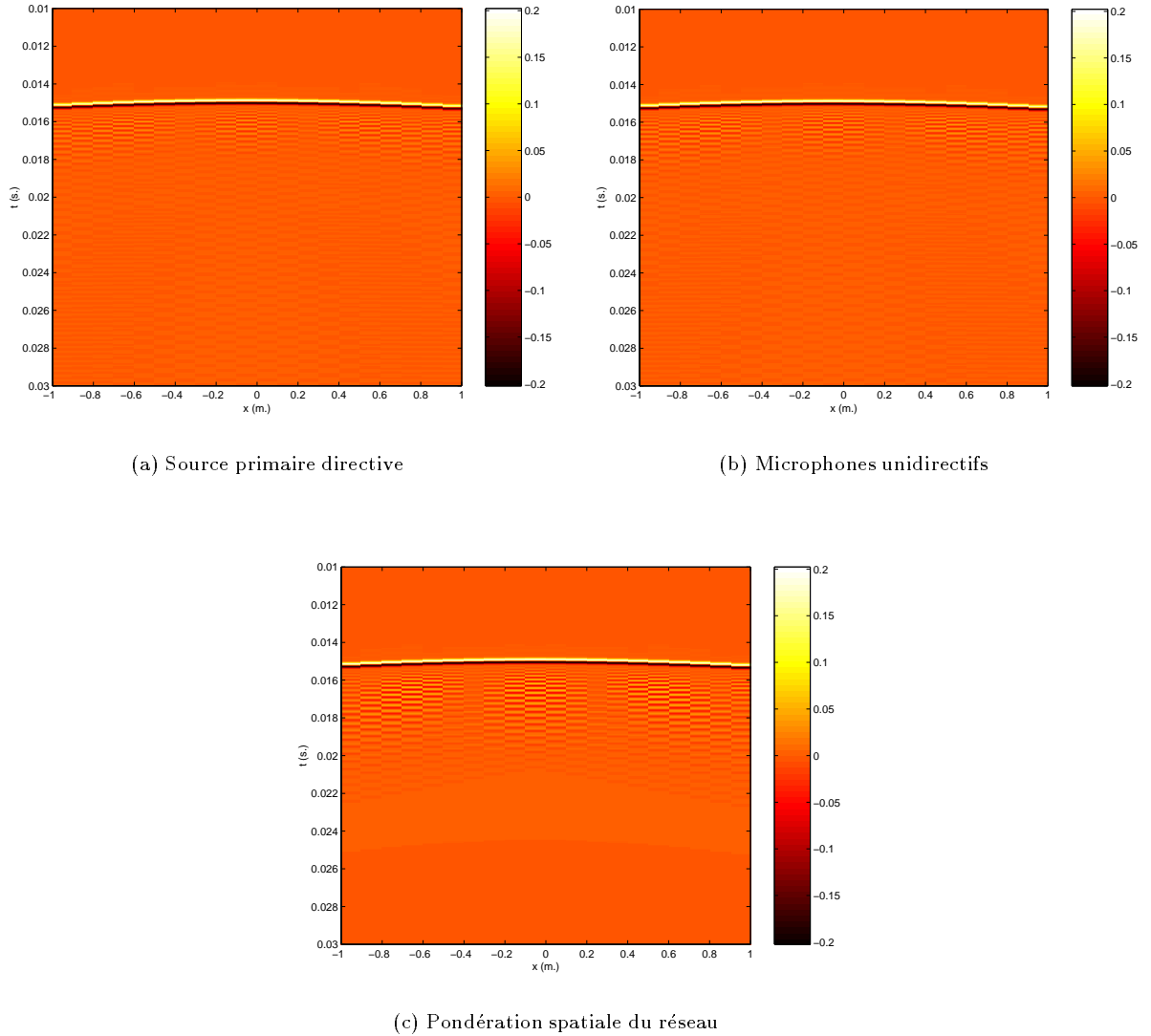


FIG. 4.14 - Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires: Limitation du support du spectre spatial en jouant sur la directivité de la source primaire, des microphones ou en appliquant une fenêtre de pondération spatiale au réseau de sources secondaires (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, $f = 2$ kHz, récepteurs en $z = 5$ m., antenne rectiligne de longueur $l = 10$ m., espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1$ m., $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)

Pour un grand nombre d'applications, la bande passante $[f_{min}, f_{max}]$ s'étend à $f_{max} = 16$ ou 20 kHz. Le souci d'offrir une bande passante de qualité HIFI⁵ interdit toute diminution significative de f_{max} . Par suite, la première solution consistant à réduire le spectre temporel pour limiter le support du spectre spatial ne peut être envisagée en deçà de $f_{max} = 16$ kHz.

Il reste la seconde méthode qui vise à limiter l'incidence des ondes sur le réseau de transducteurs. La figure 4.14a illustre l'onde de pression restituée dans la même configuration que précédemment (cf. Fig. 4.10),

5. A titre indicatif, une visioconférence de haute qualité vise une bande passante de [100Hz-16kHz].

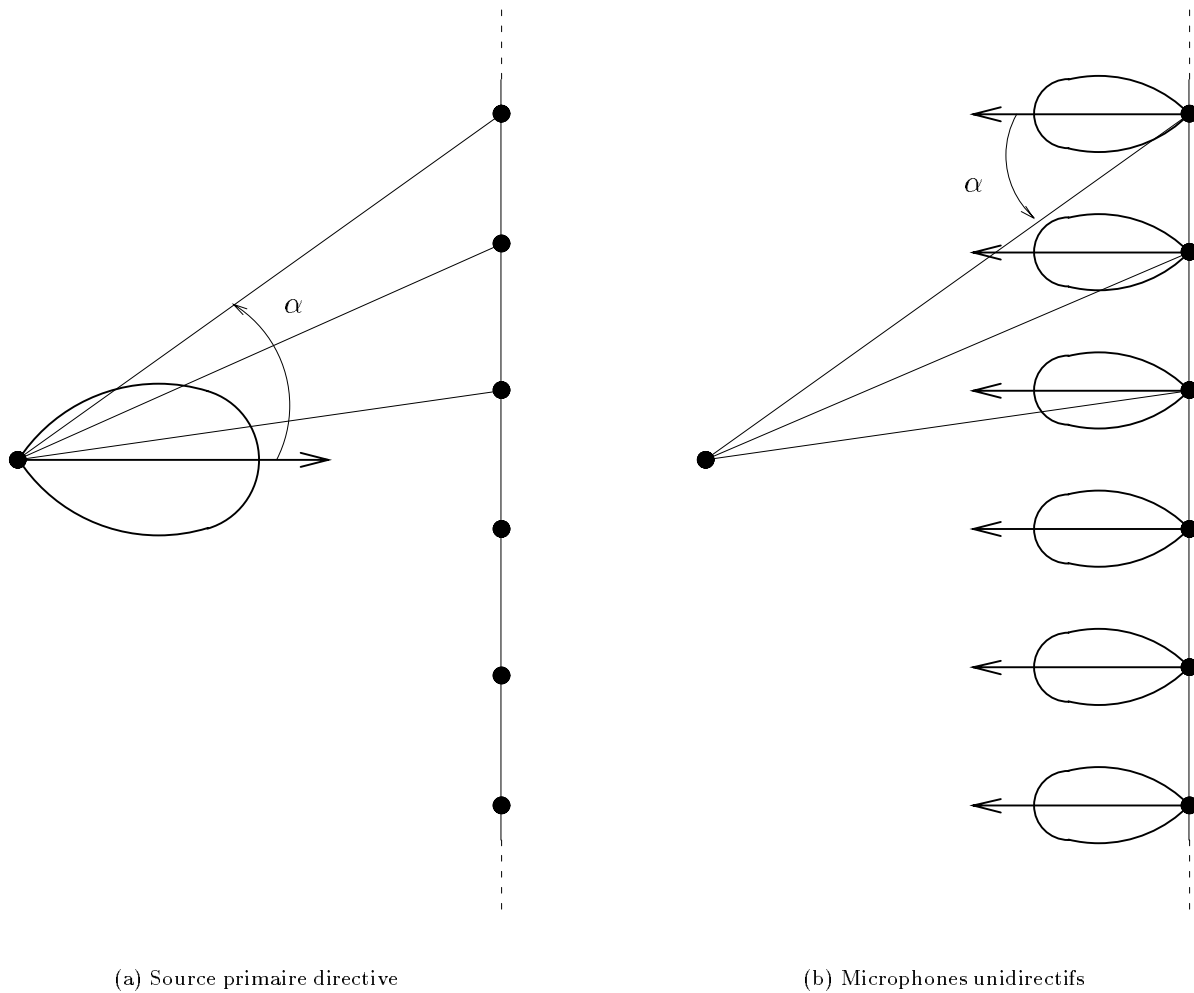


FIG. 4.15 - Equivalence entre la directivité de la source primaire et la directivité des microphones

lorsque la source primaire possède une directivité de la forme (cf. Fig. 4.13):

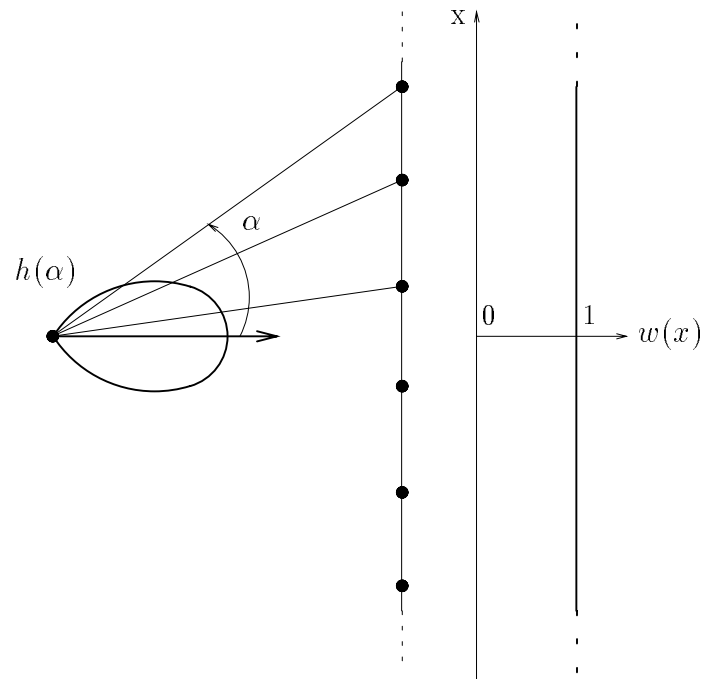
$$h(\varphi, \theta) = 2 \frac{J_1(m \sin \theta)}{m \sin \theta} \quad (4.33)$$

où la fonction J_1 désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1. Le paramètre m contrôle la largeur du lobe de directivité de la source et il est lié à l'angle α_{max} définissant l'angle pour lequel la fonction de directivité présente son premier zéro par la relation:

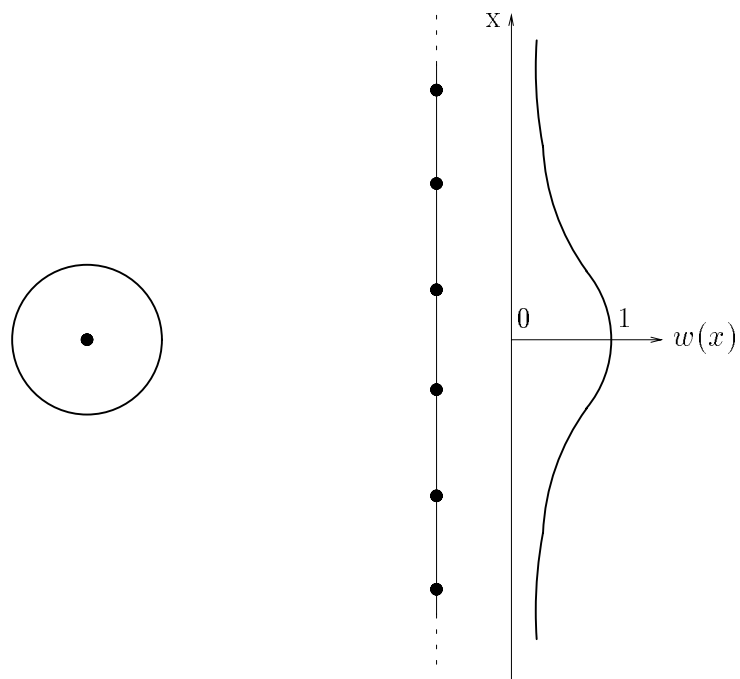
$$m = \frac{3.83}{\sin \alpha_{max}} \quad (4.34)$$

On vérifie que le champ interférentiel est atténué par rapport à une source omnidirectionnelle (cf. Fig. 4.12b). Cependant, il faut être conscient que, dans une situation réelle, il n'est a priori pas possible d'imposer une directivité aux sources primaires, sauf si on applique le concept de source notionnelle à la prise de son, auquel cas la propagation entre la source primaire et les récepteurs est simulée, ce qui permet d'imposer une directivité arbitraire aux sources primaires.

Une solution alternative consiste à utiliser des microphones unidirectionnels au lieu de microphones bidirectionnels. Il est en effet équivalent de limiter l'incidence des ondes à l'émission, au niveau de la pression rayonnée par



(a) Source primaire directive



(b) Pondération spatiale du réseau

FIG. 4.16 - Equivalence entre la directivité de la source primaire et une pondération spatiale du réseau de sources secondaires

la source primaire, ou à la réception, au niveau de l'onde captée par les microphones (cf. Fig. 4.15). La figure 4.14b reproduit l'onde de pression synthétisée par l'antenne rectiligne de $N = 100$ haut-parleurs, lorsque le rayonnement de la source primaire est omnidirectif et que des microphones unidirectifs, dont la fonction de directivité est donnée par l'équation 4.33, sont utilisés à la prise de son pour limiter le support du spectre spatial du champ enregistré. On observe que le champ interférentiel dû au repliement de spectre est bien atténué.

Par ailleurs, au cours du chapitre précédent, on a déjà mentionné l'équivalence entre la directivité de la source primaire et une pondération spatiale du réseau, pourvu que cette pondération soit assujettie à la position de la source primaire (cf. Fig. 4.16). Une dernière solution pour limiter le support du spectre spatial consiste donc à appliquer une fenêtre de pondération spatiale au réseau de sources secondaire. La figure 4.14c représente l'onde de pression restituée par l'antenne rectiligne pondérée par la fonction:

$$w(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \text{Rect}\left(\frac{2x}{L}\right) \quad (4.35)$$

où la fonction $\text{Rect}(x)$ représente la fonction Rectangle définie par:

$$\text{Rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.36)$$

et le paramètre L désigne la longueur de l'antenne:

$$L = (N - 1) \Delta$$

On a considéré une source primaire omnidirective et des microphones bidirectifs. On constate que la pondération du réseau permet bien de minimiser le champ interférentiel de repliement spectral.

4.4 Processus d'interpolation spatiale

La théorie du traitement du signal nous enseigne qu'une fois échantillonné, un signal peut être reconstitué sous forme continue par un processus d'*interpolation*. Dans le cas présent, l'expression de la pression \hat{p} restituée par un réseau discret de sources secondaires est donnée par (cf. Equ. 4.5):

$$\hat{p}(\vec{r}) = [g_1 * p_{1_e}](\vec{r}) - [g_2 * p_{2_e}](\vec{r}) \quad (4.37)$$

On est frappé par le fait que le signal de pression \hat{p} est de nature *continue*, alors même qu'*aucune procédure d'interpolation n'intervient explicitement* entre la prise de son où s'effectue l'échantillonnage de l'onde primaire et la restitution par les haut-parleurs. L'interpolation spatiale est néanmoins réalisée de manière implicite à travers le rayonnement des sources secondaires.

En termes de traitement du signal, l'interpolation spatiale correspond à [Max & coll., 1985]:

- dans le domaine des coordonnées d'espace (x, y) : *convoluer la pression échantillonnée p_{0_e} par un sinus cardinal*,
- dans le domaine dual des pulsations spatiales (χ_x, χ_y) : *filtrer la pression par un filtre Passe-Bas* afin d'éliminer les motifs spectraux dupliqués par la périodisation et ainsi isoler le motif original du spectre de la pression.

Or, si on applique une transformée de Fourier à l'équation 4.37, les produits de convolution deviennent des produits simples et il vient:

$$\hat{P}(\vec{\chi}) = G_1(\vec{\chi}) P_{1_e}(\vec{\chi}) - G_2(\vec{\chi}) P_{2_e}(\vec{\chi}) \quad (4.38)$$

On se rend compte que la convolution des signaux de pression p_{1_e} et p_{2_e} par les fonctions de Green g_1 et g_2 — qui décrivent le processus de propagation entre les sources secondaires et le point d'écoute — correspond dans le domaine dual des pulsations spatiales $\vec{\chi}(\chi_x, \chi_y)$ à filtrer leur spectre par un filtre dont la fonction de transfert est défini par les spectres G_1 et G_2 des deux fonctions de Green. Le spectre de G_1 n'est autre

que celui de l'onde sphérique. Il est donné par l'équation 4.18 et on sait qu'en première approximation son support se limite à un disque de rayon $\chi = k_{max}$ où k_{max} est le nombre d'onde associé à la fréquence maximale émise par le monopôle. Quant à G_2 , sans effectuer le calcul, on devine que son comportement est similaire, attendu que g_1 et g_2 ne diffèrent fondamentalement que par une fonction de directivité. Par suite, les filtres que définissent les spectres G_1 et G_2 sont des *filtres Passe-Bas* qui vont limiter les spectres P_{1_e} et P_{2_e} des signaux de pression échantillonnés à un disque de rayon :

$$\chi_c = k_{max} \quad (4.39)$$

Les fonctions de Green effectuent donc indirectement un filtrage Passe-Bas qui, bien qu'imparfait, permet d'isoler dans les spectres périodisés le motif principal. Ainsi la propagation entre les sources secondaires et le point d'écoute réalise bien un processus d'interpolation qui reconstitue le signal de pression continu p à partir de la pression échantillonnée p_e .

La fréquence de coupure imposée par les fonctions de transfert G_1 et G_2 associées aux fonctions de Green est déterminée par la fréquence maximale f_{max} du spectre temporel des sources secondaires. Cependant, si, au lieu de sources omnidirectives, des sources *unidirectives* sont considérées, de telle sorte que l'incidence des ondes rayonnées par les sources secondaires soit limitée à un angle $\alpha_{max} < 90^\circ$, la fréquence de coupure est abaissée à :

$$\chi_c = k_{max} \sin \alpha_{max} \quad (4.40)$$

Il est ainsi possible de contrôler la fréquence de coupure du filtre d'interpolation que constituent les fonctions de Green en jouant non seulement sur l'étendue de leur *spectre temporel*, mais aussi sur leur *directivité*.

Toutefois, il faut avoir présent à l'esprit que cette fréquence de coupure n'est aucunement liée à la fréquence de coupure du filtre d'interpolation idéal. Cette dernière, encore appelée *fréquence de Nyquist*, est fixée par le pas d'échantillonnage Δ :

$$\chi_{c_0} = \frac{\pi}{\Delta} \quad (4.41)$$

Pour faire coïncider les deux fréquences de coupure, il faut agir sur le bande passante temporelle ou la directivité des sources secondaires jusqu'à ce que :

$$\chi_c = \chi_{c_0} \quad \Leftrightarrow \quad f_{max} \sin \alpha_{max} = \frac{c}{2\Delta} \quad (4.42)$$

Le respect de cette condition garantit qu'un seul motif des spectres spatiaux périodiques P_{1_e} et P_{2_e} des signaux de pression est conservé dans la pression restituée par les sources secondaires. Sinon, dans le cas où :

$$\chi_c > \chi_{c_0}$$

le spectre de l'onde synthétisée par les sources secondaires comprend non seulement le motif principal, mais aussi une fraction d'un motif adjacent, voire plusieurs motifs. Cette situation se rencontre lorsque, afin de tirer profit de la directivité de la source primaire, on choisit d'appliquer un pas d'échantillonnage inférieur à la valeur critique (correspondant à la demi-longueur d'onde), tel que :

$$\frac{\lambda}{2} < \Delta < \frac{\lambda}{2 \sin \alpha_{max}}$$

Par exemple, considérons une source primaire dont l'angle maximal d'émission vaut 30° (cf. Equ. 4.33 & 4.34). La condition de Shannon impose alors un pas d'échantillonnage :

$$\Delta < \frac{\lambda}{2 \sin \alpha_{max}} = 34 \text{ cm}$$

En échantillonnant le signal de pression avec un pas de $\Delta = 25 \text{ cm}$, on est donc assuré d'éviter le repliement de spectre. Or, sur la figure 4.17a, qui reproduit l'onde de pression synthétisée à la fréquence $f = 1 \text{ kHz}$ par une antenne rectiligne de $N = 100$ sources secondaires espacées de $\Delta = 0.25 \text{ m}$, on met en évidence une erreur de reconstruction, alors même que le critère de Shannon est vérifié. Le front d'onde est suivi d'une

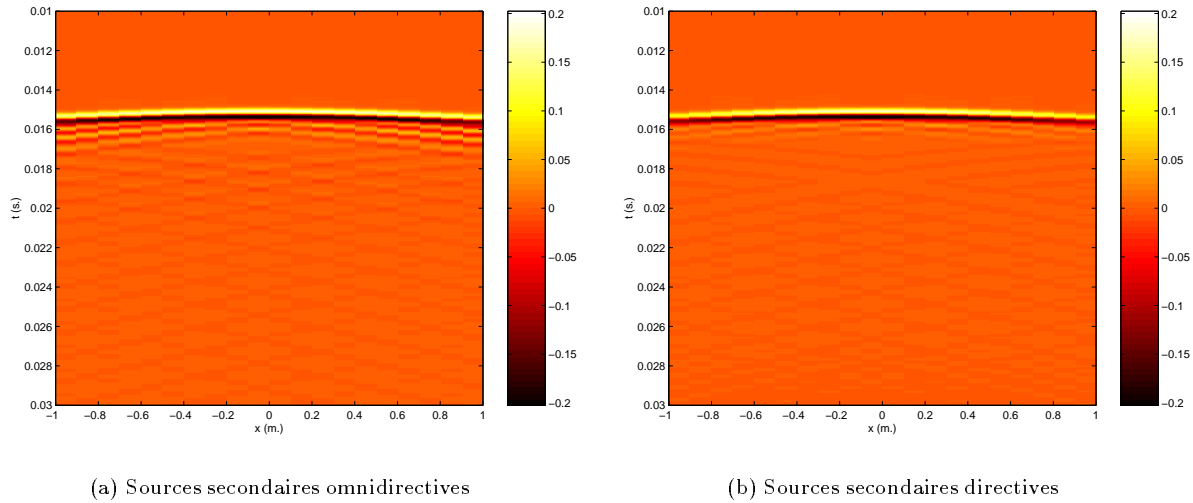


FIG. 4.17 - Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires: Erreur d'interpolation spatiale lorsque $\chi_c > \chi_{c_0}$ et Correction par la directivité des sources secondaires (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, $f = 1$ kHz, récepteurs en $z = 5$ m., antenne rectiligne de longueur $l = 10$ m., espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1$ m., $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)

onde résiduelle qui rappelle l'erreur d'aliasing, mais qui résulte ici d'une erreur d'interpolation liée à une fréquence de coupure trop élevée:

$$\chi_c = k_{max} = 18.5$$

Or, une interpolation idéale requerrait une fréquence de coupure égale à:

$$\chi_c = \frac{\pi}{\Delta} = 12.6$$

Le signal d'erreur correspond donc aux deux motifs adjacents situés de part et d'autre du motif principal et qui ne sont pas éliminés par l'interpolation réalisée par les sources secondaires. La fréquence de coupure χ_c peut être abaissée en utilisant des sources secondaires directives au lieu de sources omnidirectives. La figure 4.17b illustre l'onde de pression synthétisée par des sources secondaires directives dans la même configuration que précédemment. On observe que l'onde résiduelle d'erreur a presque disparu: la directivité des sources secondaires a bien permis de minimiser la présence des motifs adjacents.

En conséquence, même si l'interpolation spatiale de la pression rayonnée s'effectue de façon implicite, il faut néanmoins s'assurer qu'elle s'effectue correctement du point de vue des fréquences de coupure. Cependant, vérifier la condition:

$$\chi_c = \chi_{c_0}$$

conduit à réduire la bande passante à la fois temporelle et spatiale de l'onde restituée dans des limites qui ne permettent pas de préserver la qualité de la reproduction. En pratique, comme pour le filtre d'anti-repliement, on cherchera donc à maintenir un spectre temporel étendu en privilégiant le contrôle de la directivité des sources secondaires pour abaisser la fréquence de coupure χ_c , mais on se contentera de minimiser l'effet des motifs adjacents en diminuant la valeur de χ_c sans imposer systématiquement qu'elle soit égale à χ_{c_0} .

Des travaux menés au laboratoire de l'U.T.D. suggèrent de synthétiser des sources directives en regroupant les haut-parleurs du réseau en sous-antennes [Start, 1997]. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que, si les haut-parleurs constituant chaque sous-antenne sont pondérés selon un sinus cardinal, on est capable de réaliser une source dont le spectre spatial coïncide avec le filtre Passe-Bas d'interpolation idéal et on s'affranchit ainsi parfaitement de l'influence des motifs périodiques de la pression échantillonnée. La mise en œuvre de cette méthode a donné de bons résultats, mais l'approche présente l'inconvénient d'augmenter le

nombre de haut-parleurs. De plus, si les haut-parleurs sont espacés de Δ , le pas d'échantillonnage effectif est doublé en raison du regroupement des haut-parleurs en sous-antenne.

4.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, l'influence de la discrétisation du réseau de sources secondaire a été étudiée. Le problème a été formulé en termes d'*échantillonnage spatial* de l'onde de pression acoustique, ce qui a permis de relier la problématique aux propriétés de l'échantillonnage classique, telles que le *critère de Shannon* pour le choix du pas d'échantillonnage, le *repliement spectral* et le processus d'*interpolation*.

Dans le cas d'un réseau discret de sources secondaires, le pas d'échantillonnage est imposé par les dimensions des transducteurs qui déterminent l'espacement minimal. Avec les haut-parleurs disponibles actuellement, il est pratiquement impossible d'obtenir un espacement inférieur à 10 centimètres. Par suite, la condition de Shannon ne peut être vérifiée dans les hautes fréquences et on est confronté à des phénomènes de repliement de spectre spatial. Outre le repliement de spectre, la discrétisation du réseau pose la question de l'interpolation spatiale du champ sonore, puisque ce dernier, une fois qu'il est échantillonné, est reconstitué sous forme continue par les sources secondaires. Ainsi, le champ restitué par un réseau discret présente deux sources d'erreur :

- le repliement spectral à la prise de son,
- l'interpolation spatiale à la restitution.

Pour les corriger, on a introduit le concept de *filtre spatial* destiné à limiter le support du spectre spatial des signaux de pression enregistrés ou restitués : filtre anti-repliement à la prise de son et filtre d'interpolation à la restitution. En pratique, ce filtrage peut être réalisé en contrôlant le spectre temporel et la directivité des sources — directivité des sources primaires (ou par équivalence directivité des microphones) à la prise de son et directivité des sources secondaires à la restitution —, puisque le support du spectre spatial d'une source dépend à la fois de la fréquence et de l'incidence des ondes qu'elle rayonne. Afin de préserver l'étendue de la bande passante temporelle, on privilégie le contrôle de la directivité. Une correction idéale impose néanmoins une limitation trop restrictive du spectre spatial. Pour cette raison, on préfère souvent une correction imparfaite offrant une reconstruction exacte dans les basses fréquences ($f < 1.5$ kHz) en tolérant une erreur pour la restitution des hautes fréquences ($f > 1.5$ kHz) [Start, 1997], dans la mesure où des études psychoacoustiques indiquent que la perception des sources virtuelles, notamment en termes de localisation auditive, est dominée par les composantes des basses fréquences.

Références Bibliographiques

- BLAUERT JENS. (1983). *Spatial Hearing: The Psychophysics of Human Sound Localization*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- BRUNEAU M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans.
- HUMBERT E. (1997). Un procédé à ultrasons révolutionne la reproduction sonore. *Electronique Internationale*, **261**(Avril), pp. 26.
- JOHNSON D.H. & DUDGEON D.E. (1993). *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*. Prentice Hall.
- MAX J. & COLL. (1985). *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson, Paris.
- NELSON P.A. (1994). Active Control of Acoustic Fields and the Reproduction of Sound. *J. Sound Vib.*, **177**(4), pp. 447–477.
- START E. (1997). *Direct Sound Enhancement by Wave Field Synthesis*. Ph.D. Thesis, Faculty of Applied Physics, Delft, Pays-Bas.

Table des Illustrations

4.1	Discrétisation de la distribution de sources secondaires: Maillage de la surface $\partial\Omega_0$	182
4.2	Système de coordonnées associé à la surface $\partial\Omega_0$	184
4.3	Spectre spatial d'une onde plane $p_0(\vec{r}) = a_p e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}$; Représentation symbolique d'une distribution de Dirac en $\vec{\chi}(k_x = -0.5, k_y = 0.25)$	186
4.4	Décomposition d'un front d'onde sphérique en une infinité de fronts d'ondes planes élémentaires	188
4.5	Spectre spatial d'une onde sphérique $p_0(\vec{r}) = a_s \frac{e^{jkr}}{4\pi r}$ ($k = 1, z_0 = 25$)	190
4.6	Echantillonnage spatial de la pression p_0 : Périodisation du spectre $P_0(\chi_x, \chi_y)$	191
4.7	Coordonnées sphériques pour le vecteur d'onde \vec{k}	193
4.8	Pas d'échantillonnage et incidence de l'onde plane	193
4.9	Directivité d'une source et spectre spatial	195
4.10	Simulation du phénomène de repliement spectral: Configuration de la source primaire, des sources secondaires et des récepteurs	198
4.11	Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires à la fréquence $f_1 = 500$ Hz $< f_{al}$: Absence de phénomène d'aliasing (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, récepteurs en $z = 5$ m., antenne rectiligne de longueur $l = 10$ m., espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1$ m., $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)	199
4.12	Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires à la fréquence $f_2 = 2$ kHz $> f_{al}$: Mise en évidence du phénomène d'aliasing (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, récepteurs en $z = 5$ m., antenne rectiligne de longueur $l = 10$ m., espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1$ m., $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)	199
4.13	Source directive: Exemple de diagramme de directivité (cf. Equ. 4.33)	200
4.14	Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires: Limitation du support du spectre spatial en jouant sur la directivité de la source primaire, des microphones ou en appliquant une fenêtre de pondération spatiale au réseau de sources secondaires (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, $f = 2$ kHz, récepteurs en $z = 5$ m., antenne rectiligne de longueur $l = 10$ m., espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1$ m., $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)	201
4.15	Equivalence entre la directivité de la source primaire et la directivité des microphones . .	202
4.16	Equivalence entre la directivité de la source primaire et une pondération spatiale du réseau de sources secondaires	203
4.17	Onde de pression restituée par un réseau discret de sources secondaires: Erreur d'interpolation spatiale lorsque $\chi_c > \chi_{c_0}$ et Correction par la directivité des sources secondaires (source primaire en $s_1[0., 0., 0.]$, $f = 1$ kHz, récepteurs en $z = 5$ m., antenne rectiligne de longueur $l = 10$ m., espacement entre sources secondaires de $\Delta = 0.1$ m., $N = 100$ sources secondaires au total, cf. Fig. 4.10, cf. Annexes E & F)	206

