

ANNEXES

Annexe A

Poser et résoudre un problème aux limites en acoustique

Sommaire

A.1 Poser le problème	385
A.1.1 Problème temporel	385
A.1.2 Problème fréquentiel	386
A.2 Fonction de Green	386
A.2.1 Problème de Green temporel	386
A.2.2 Problème de Green fréquentiel	387
A.3 Résolution par équations intégrales	388
A.3.1 Solution de l'équation des ondes	388
A.3.2 Solution de l'équation de Helmholtz	389
Références Bibliographiques	390

A.1 Poser le problème

De façon générale, un problème aux limites¹ est défini à partir:

- ▷ d'une *équation*, qui décrit le comportement du champ dans tout le domaine spatio-temporel $\Omega \times [t_1, t_2]$ considéré,
- ▷ de *conditions aux limites*, qui définissent les valeurs du champ sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω ,
- ▷ de *conditions initiales*, par lesquelles sont spécifiées les valeurs du champ à l'instant $t = t_1$.

Dans les problèmes de l'acoustique, l'équation correspond à l'*équation des ondes* si le problème est défini dans le domaine temporel, ou à l'*équation de Helmholtz* dans le cas où le problème est résolu dans le domaine fréquentiel. Nous allons à présent détailler la formulation d'un problème aux limites.

A.1.1 Problème temporel

Selon le schéma général donné ci-dessus, un problème défini dans le domaine temporel se pose en spécifiant:

- une **équation des ondes**

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(\vec{r}, t) = -s(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \Omega \quad \text{et} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.1})$$

Dans cette expression, la fonction scalaire $p(\vec{r}, t)$ désigne le potentiel des vitesses² induit au point \vec{r} à l'instant t , et la fonction $s(\vec{r}, t)$ représente le terme de sources — sources de débit ou de force —.

- des **conditions aux limites**

Elles spécifient les valeurs sur la frontière $\partial\Omega$ de la fonction $p(\vec{r}, t)$ et/ou de son gradient normal à la frontière³ $\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}$. On distingue trois catégories de conditions aux limites:

- conditions de *Dirichlet* (spécification du champ)

$$p(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.4})$$

- conditions de *Neumann* (spécification du gradient du champ)

$$\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} = \nu(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.5})$$

- conditions mixtes, dites de “*Churchill*”, exprimant une relation entre le champ et son gradient sur la frontière $\partial\Omega$:

$$\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} + \zeta(\vec{r}, t) * p(\vec{r}, t) = \xi(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.6})$$

Le symbole $*$ représente un produit de convolution temporel.

Cette condition traduit une *relation d'impédance*, dans la mesure où elle relie le potentiel des vitesses — c'est-à-dire à un facteur près la pression — à son gradient qui de son côté peut être assimilé à la vitesse particulière. Le terme $\zeta(\vec{r}, t)$ s'interprète d'ailleurs en terme d'admittance acoustique.

1. Cette annexe constitue, en toute humilité, un “résumé” du chapitre VI de l'ouvrage [Bruneau, 1983].

2. On rappelle les relations qui relient le potentiel des vitesses u à [Bruneau, 1983]:

- la pression acoustique p :

$$p(\vec{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

- la vitesse particulière \vec{v} :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} u(\vec{r}, t) \quad (\text{A.3})$$

Ces deux relations sont valables dans un milieu non soumis à des forces extérieures, c'est-à-dire que les termes de sources ne concernent que des sources de débit.

3. Par convention, le vecteur \vec{n} correspond à la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

- **des conditions initiales**

Il s'agit des conditions de Cauchy qui spécifient la valeur du champ et de sa dérivée temporelle au premier ordre à l'instant initial:

$$\begin{cases} p(\vec{r}, t_1) = \alpha(\vec{r}, t_1) \\ \frac{\partial p(\vec{r}, t_1)}{\partial t} = \beta(\vec{r}, t_1) \end{cases} \quad \forall \vec{r} \in \Omega \quad . \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Problème fréquentiel

Le problème dans le domaine fréquentiel est dérivé du problème temporel par Transformée de Fourier⁴.

- **équation de Helmholtz**

$$(\Delta + k^2) p(\vec{r}, \omega) = s(\vec{r}, \omega) \quad \forall \vec{r} \in \Omega \quad (\text{A.8})$$

(k est le nombre d'onde défini par: $k = \frac{\omega}{c}$)

- **conditions aux limites**

- conditions de *Dirichlet*

$$p(\vec{r}, \omega) = \mu(\vec{r}, \omega) \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.9})$$

- conditions de *Neumann*

$$\vec{\nabla} p(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{n} = \nu(\vec{r}, \omega) \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.10})$$

- conditions de *Churchill*

$$\vec{\nabla} p(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{n} + \zeta(\vec{r}, \omega) p(\vec{r}, \omega) = \xi(\vec{r}, \omega) \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.11})$$

- **conditions initiales**

Implicitement, le problème défini dans le domaine fréquentiel suppose des conditions initiales nulles. Par suite, elles n'interviennent pas dans la résolution du problème.

A.2 Fonction de Green

Les problèmes précédents peuvent être résolus grâce à la théorie des fonctions de Green. De façon schématique, une fonction de Green est une sorte d'*opérateur inverse*. Elle est exprimée en résolvant un problème, dit "problème de Green", défini à partir du problème initial que l'on cherche à résoudre...

A.2.1 Problème de Green temporel

Supposons que l'on veut résoudre un des problèmes donnés à la section A.1. Il est toujours possible de lui associer une fonction de Green qui est défini comme la solution du problème suivant:

- **équation**

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) \quad \forall \vec{r} \in \Omega \quad \text{et} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.12})$$

D'après cette équation, la fonction de Green s'interprète comme la pression induite par un monopôle situé en $\vec{r} = \vec{r}_0$ et émettant une impulsion à l'instant $t = t_0$.

4. On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $p(\vec{r}, t)$ est désignée par $p(\vec{r}, \omega)$.

- **conditions aux limites**

Les conditions aux limites du problème de Green associé peuvent être définies indépendamment de celles du problème initial, pourvu qu'il s'agisse de conditions aux limites *homogènes*, c'est-à-dire que, dans les équations A.4 à A.6, le second membre — qui représente le terme de sources — est nul. En effet, par définition, un problème de Green ne comporte qu'une source: le monopôle impulsif apparaissant dans l'équation des ondes, ce qui impose que toutes les autres équations soient homogènes. Comme pour le problème général, on distingue:

- les conditions de *Dirichlet* homogènes

$$g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.13})$$

- les conditions de *Neumann* homogènes

$$\vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.14})$$

- les conditions de *Churchill* homogènes

$$\vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \cdot \vec{n} + \zeta(\vec{r}, t) * g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (\text{A.15})$$

En pratique, on préfère choisir la condition la plus proche de celle du problème initial, dans la mesure où ce choix simplifie l'expression de la fonction de Green associée.

- **principe de causalité**

Aucune condition initiale n'est associée au problème de Green. S'y substitue le principe de causalité qui exprime que l'impulsion émise à l'instant $t = t_0$ n'a aucun effet aux instants antérieurs $t < t_0$ (relation de cause à effet). Ce principe se traduit mathématiquement par la condition:

$$[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)]_{t < t_0} = 0$$

A.2.2 Problème de Green fréquentiel

De façon similaire, on peut définir un problème de Green dans le domaine des fréquences:

- **équation**

$$(\Delta + k^2) g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \forall \vec{r} \in \Omega \quad (\text{A.16})$$

- **conditions aux limites**

- conditions de *Dirichlet* homogènes

$$g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.17})$$

- conditions de *Neumann* homogènes

$$\vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.18})$$

- conditions de *Churchill* homogènes

$$\vec{\nabla} g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \cdot \vec{n} + \zeta(\vec{r}, \omega) g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) = 0 \quad \forall \vec{r} \in \partial\Omega \quad (\text{A.19})$$

- **conditions initiales**

Pour les mêmes raisons que dans le problème général, les conditions initiales n'interviennent pas dans le domaine fréquentiel.

A.3 Résolution par équations intégrales

Le champ cherché est exprimé sous la forme d'une équation intégrale obtenue en combinant le problème à résoudre avec le problème de Green associé. La démarche est analogue dans les domaines temporel et fréquentiel.

A.3.1 Solution de l'équation des ondes

L'équation des ondes (cf. relation A.1) est multipliée par la fonction de Green $g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$. Réciproquement, l'équation vérifiée par la fonction de Green est multipliée par la fonction $p(\vec{r}_0, t_0)$. Cette seconde équation est ensuite soustraite à la première et, après intégration sur le domaine spatio-temporel considéré $\Omega \times [t_1, t_2]$, il vient:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 [g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \Delta_0 p(\vec{r}_0, t_0) - p(\vec{r}_0, t_0) \Delta_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)] \\ & - \frac{1}{c^2} \iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \frac{\partial^2 p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t^2} - p(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial^2 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)}{\partial t^2} \right] \\ & = - \iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 s(\vec{r}_0, t_0) g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) + \iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) p(\vec{r}_0, t_0) \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

Le premier terme est simplifié grâce au *théorème de Green*:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} dV_0 [g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \Delta_0 p(\vec{r}_0, t_0) - p(\vec{r}_0, t_0) \Delta_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)] \\ & = \iint_{\partial\Omega} dS_0 \vec{n} \cdot [p(\vec{r}_0, t_0) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) - g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0)] \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

De la même façon, pour le second terme, on montre au moyen d'une intégration par parties⁵ que:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \frac{\partial^2 p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t^2} - p(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial^2 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)}{\partial t^2} \right] \\ & = \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \frac{\partial p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t} - p(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)}{\partial t} \right]_{t_1}^{t_2} \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

En vertu du *principe de causalité*, la fonction de Green et sa dérivée sont nulles en $t_0 = t_2$, par suite, il reste:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \frac{\partial^2 p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t^2} - p(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial^2 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)}{\partial t^2} \right] \\ & = - \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \frac{\partial p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t} - p(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)}{\partial t} \right]_{t_0=t_1} \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

Enfin, en tenant compte des propriétés de la distribution de Dirac, le dernier terme du second membre de l'équation A.20 s'exprime:

$$\iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) p(\vec{r}_0, t_0) = p(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \Omega \text{ et } t \in [t_1, t_2]$$

Il correspond au champ cherché.

⁵. ou en remarquant que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f(t) \frac{\partial g}{\partial t} - g(t) \frac{\partial f}{\partial t} \right] = f(t) \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - g(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad .$$

En recombinaut ces différents termes une fois simplifiés, on en déduit la solution de l'équation des ondes:

$$\begin{aligned}
 p(\vec{r}, t) = & \iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 s(\vec{r}_0, t_0) g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \\
 & + \iint_{\partial\Omega} dS_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0) - p(\vec{r}_0, t_0) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \right] \\
 & + \frac{1}{c^2} \iiint_{\Omega} dV_0 \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \frac{\partial p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t} - p(\vec{r}_0, t_0) \frac{\partial g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)}{\partial t} \right]_{t_0=t_1} \quad (\text{A.24})
 \end{aligned}$$

Dans le second membre, le premier terme traduit l'effet des sources — dans Ω —, le second, celui des conditions aux limites — sur $\partial\Omega$ — et le troisième, celui des conditions initiales — appliquées à l'instant $t_0 = t_1$ —.

A.3.2 Solution de l'équation de Helmholtz

La solution du problème de Helmholtz s'obtient par une procédure analogue à la solution de l'équation des ondes. L'équation d'Helmholtz et l'équation vérifiée par la fonction de Green sont respectivement multipliées par les fonctions $g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)$ et $p(\vec{r}_0, \omega)$. En soustrayant les deux équations ainsi obtenues et en intégrant le résultat sur Ω , il vient:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} dV_0 [g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \Delta_0 p(\vec{r}_0, \omega) - p(\vec{r}_0, \omega) \Delta_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)] \\
 = - \iiint_{\Omega} dV_0 s(\vec{r}_0, \omega) g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) + \iiint_{\Omega} dV_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) p(\vec{r}_0, \omega) \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

Comme précédemment, le premier terme peut être simplifié grâce au théorème de Green. Ensuite, on effectue la dernière intégrale en appliquant les propriétés de la distribution de Dirac. Finalement, la solution s'écrit:

$$\begin{aligned}
 p(\vec{r}, \omega) = & \iiint_{\Omega} dV_0 s(\vec{r}_0, \omega) g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \\
 & + \iint_{\partial\Omega} dS_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) - p(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \right] \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

On reconnaît dans le premier terme l'effet des sources et dans le second, la contribution des conditions aux limites. Le terme lié aux conditions initiales a disparu puisque dans le problème fréquentiel elles sont implicitement nulles.

Les *intégrales de Kirchhoff et de Rayleigh* exprimées dans le domaine temporel ou fréquentiel sont directement dérivées de ces solutions générales. La démarche qui y conduit est décrite dans les deux annexes suivantes (cf. Annexes B & C).

Références Bibliographiques

BRUNEAU M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans.

Annexe B

Intégrale de Kirchhoff

Sommaire

B.1	Données du problème de Kirchhoff	393
B.2	Choix de la fonction de Green	393
B.3	Spécificités de l'approche de Kirchhoff	394
B.4	Propriétés de l'intégrale de Kirchhoff	394
	Références Bibliographiques	396

B.1 Données du problème de Kirchhoff

Dans le problème de Kirchhoff, l'espace Ω est décomposé en deux sous-espaces Ω_1 et Ω_2 qui sont séparés par la surface $\partial\Omega$. Toutes les sources sont contenues à l'intérieur de Ω_1 et on cherche à exprimer le champ acoustique présent dans Ω_2 . Du point de vue du problème général exposé en annexe A, il s'agit donc de résoudre l'équation des ondes dans un espace Ω_2 qui ne comporte aucun terme de source, c'est-à-dire que:

$$s(\vec{r}_0, t_0) = 0 \quad \forall \vec{r}_0 \in \Omega_2 \text{ et } t_0 \in [t_1, t_2]$$

Par ailleurs, on se place dans le cas où les conditions initiales du problème sont nulles. Le champ régnant à l'intérieur de Ω_2 doit être nul à l'instant initial t_1 et à tous les instants antérieurs $t \leq t_1$. Pour vérifier cette hypothèse, il suffit de débiter la période d'observation à un instant t_1 où l'onde émise par les sources situées dans Ω_1 n'a pas encore atteint Ω_2 .

On reporte l'ensemble de ces données dans l'expression de la solution générale de l'équation des ondes établie en annexe A (cf. Equ. A.24). En l'absence de sources et de conditions initiales, il ne reste que le terme lié aux *conditions limites* sur la frontière $\partial\Omega$:

$$p(\vec{r}, t) = \iint_{\partial\Omega} dS_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0) - p(\vec{r}_0, t_0) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \right] \quad (\text{B.1})$$

Dans le domaine fréquentiel, il vient de même¹:

$$p(\vec{r}, \omega) = \iint_{\partial\Omega} dS_0 \vec{n} \cdot \left[g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) - p(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \right] \quad (\text{B.2})$$

B.2 Choix de la fonction de Green

La forme finale de l'intégrale de Kirchhoff est obtenue en remplaçant dans les équations B.1 et B.2, la fonction g par une fonction de Green particulière: *la fonction de Green en champ libre* qui est la solution du problème dans lequel on impose les *conditions de Sommerfeld* sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire l'annulation de la pression et de son gradient sur la frontière du domaine considéré. Ces conditions traduisent un rayonnement dans un espace infini — c'est-à-dire en champ libre —. La fonction de Green s'exprime dans le domaine temporel comme [Bruneau, 1983]:

$$g_\infty(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = \frac{\delta\left(\frac{R}{c} - \tau\right)}{4\pi R} \quad (\text{B.3})$$

avec:

$$\begin{cases} R = |\vec{r} - \vec{r}_0| \\ \tau = t - t_0 \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier — solution du problème fréquentiel associé — prend la forme:

$$g_\infty(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (\text{B.4})$$

On note que cette fonction de Green, qu'il s'agisse de sa forme temporelle ou fréquentielle, ne dépend pas spécifiquement des vecteurs \vec{r} et \vec{r}_0 , mais seulement de la distance R . Par suite, on préfère la désigner par le terme $g_\infty(R, t - t_0)$ ou $g_\infty(R, \omega)$.

Dans les intégrales des relations B.1 et B.2 intervient le gradient de la fonction de Green. Pour le calculer, on utilise les résultats suivants:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_0 [g_\infty(R, \omega)] = \frac{\partial}{\partial R} [g_\infty(R, \omega)] \cdot \vec{\nabla}_0 [R] \\ \vec{\nabla}_0 [R] = -\frac{\vec{R}}{R} \end{cases}$$

1. La solution dans le domaine fréquentiel peut aussi être obtenue sans avoir recours au problème de Helmholtz, en effectuant la Transformée de Fourier de la solution dans le domaine temporel.

En dérivant la fonction de Green — expressions B.3 et B.4 — par rapport à la variable R , il vient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\delta(\frac{R}{c} - \tau)}{R} \right] = \frac{\delta'(\frac{R}{c} - \tau)}{Rc} - \frac{\delta(\frac{R}{c} - \tau)}{R^2} \\ \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] = -\frac{e^{-jkR}}{R^2} (1 + jkR) \end{array} \right.$$

Il suffit alors de reporter l'ensemble de ces relations dans les équations B.1 et B.2. Pour l'expression dans le domaine temporel (cf. Equ. B.1), l'intégrale sur le temps est effectuée en appliquant les propriétés de la distribution de Dirac et de sa dérivée:

$$p(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} dS_0 \vec{n} \cdot \left[\frac{1}{R} \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0) - \frac{\vec{R}}{cR^2} \frac{\partial p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t_0} - \frac{\vec{R}}{R^3} p(\vec{r}_0, t_0) \right]_{t_0 = t - \frac{R}{c}} \quad (\text{B.5})$$

Dans le domaine fréquentiel, on obtient:

$$p(\vec{r}, \omega) = \iint_{\partial\Omega} dS_0 \vec{n} \cdot \left[\vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) - p(\vec{r}_0, \omega) \frac{\vec{R}}{R^2} (1 + jkR) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] \quad (\text{B.6})$$

On reconnaît bien les formulations temporelle et fréquentielle de l'intégrale de Kirchhoff.

B.3 Spécificités de l'approche de Kirchhoff

De cette démonstration, on retiendra que l'approche de Kirchhoff se démarque par deux points spécifiques:

- la *géométrie* de la frontière $\partial\Omega$ qui doit être une surface fermée,
- et le choix de la *fonction de Green* — fonction de Green en champ libre —.

C'est en jouant sur ces deux points que l'on pourra dériver d'autres formulations...

B.4 Propriétés de l'intégrale de Kirchhoff

Au chapitre 3, l'intégrale de Kirchhoff est interprétée comme une distribution de sources secondaires permettant de restituer l'onde originale en l'absence des sources primaires. Sa valeur exprime l'onde rayonnée par un ensemble de sources réparties le long de $\partial\Omega$ et alimentées par l'onde primaire incidente. Cependant, on ne s'est intéressé qu'au champ rayonné dans Ω_2 , les sources primaires étant contenues à l'intérieur de Ω_1 . L'espace des sources et l'espace de restitution constituent donc deux domaines *distincts*. Or, deux questions viennent à l'esprit:

- quel est le champ induit dans Ω_1 par les sources secondaires?
- que se passe-t-il lorsque les sources primaires sont situées dans Ω_2 ?

En fait, ces deux situations se réfèrent au même problème mathématique: que devient l'intégrale de Kirchhoff quand les espaces des sources et de restitution sont *confondus*?

Pour répondre à cette question, il faut se reporter à la résolution générale d'un problème aux limites qui a été exposée en annexe A. On cherche à exprimer le champ induit dans Ω_1 par la distribution de sources le long de $\partial\Omega$. Reprenons la première expression de l'équation-intégrale² (cf. Equ. A.20). Le problème est résolu dans le domaine Ω_2 , l'intégrale triple porte donc sur Ω_2 au lieu de Ω . Comme Ω_2 ne contient pas de sources primaires, le terme lié aux sources disparaît. De plus, dans le problème de Kirchhoff, les conditions initiales sont supposées nulles. Par suite, dans l'équation-intégrale A.20, il ne subsiste que deux termes:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 [g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \Delta_0 p(\vec{r}_0, t_0) - p(\vec{r}_0, t_0) \Delta_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)] \\ = \iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) p(\vec{r}_0, t_0) \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

2. Dans le raisonnement qui suit, on s'est limité au problème temporel, les résultats pouvant être aisément étendus au domaine fréquentiel.

Dans le membre de gauche, l'intégrale triple est remplacée par une intégrale double sur $\partial\Omega$ grâce au théorème de Green et on obtient l'intégrale de Kirchhoff. Jusqu'à présent, nous avons implicitement supposé que dans l'argument de la distribution de Dirac, le point \vec{r} appartenait au domaine Ω_2 . Or, rien ne nous interdit de prendre le point \vec{r} dans Ω_1 — seule la variable d'intégration \vec{r}_0 est cantonnée au domaine Ω_2 —, mais, en ce cas, la règle de calcul dictée par la théorie des distributions est :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

Il s'ensuit que, pour être complet, il faut écrire :

$$\iiint_{\Omega} dV_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) p(\vec{r}_0, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \in \Omega_1, \forall t \in [t_1, t_2] \\ p(\vec{r}, t) & \text{si } \vec{r} \in \Omega_2, \forall t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

L'équation-intégrale B.7 devient ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} dS_0 \vec{n} \cdot \left[p(\vec{r}_0, t_0) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) - g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0) \right] \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \in \Omega_1, \forall t \in [t_1, t_2] \\ p(\vec{r}, t) & \text{si } \vec{r} \in \Omega_2, \forall t \in [t_1, t_2] \end{cases} \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Ce résultat signifie que, dans la configuration où les sources primaires sont contenues dans Ω_1 , le champ rayonné par les sources secondaires réparties le long de $\partial\Omega$ est nul dans Ω_1 , tandis que dans Ω_2 , il correspond à l'onde primaire. Plus généralement, dès lors que les sources primaires et le point de restitution \vec{r} appartiennent au même domaine — Ω_1 ou Ω_2 —, l'intégrale de Kirchhoff s'annule. Cette propriété a deux conséquences pratiques :

- pour la *prise de son*, les sources situées dans l'espace de restitution ne sont pas prises en compte, puisque leur contribution dans l'intégrale de Kirchhoff est nulle,
- pour la *restitution*, les sources secondaires ne perturbent pas le champ présent dans l'espace des sources.

Références Bibliographiques

BRUNEAU M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans.

Annexe C

Intégrale de Rayleigh

Sommaire

C.1 Géométrie du problème de Rayleigh	399
C.2 Choix de la fonction de Green	399
C.3 Propriétés de l'intégrale de Rayleigh	401
Références Bibliographiques	403

C.1 Géométrie du problème de Rayleigh

Le problème de Rayleigh est basé sur les mêmes données que le problème de Kirchhoff, à savoir:

- l'espace entier Ω est décomposé en deux domaines Ω_1 et Ω_2 ,
- on s'intéresse au champ présent dans le domaine Ω_2 ne contenant aucune source primaire,
- les conditions initiales sont supposées nulles dans Ω_2 .

Par suite, la solution est exprimée à partir de la même équation-intégrale (cf. Equ. B.1 & B.2) correspondant à la solution d'un problème aux limites dont on n'a retenu que le terme lié aux conditions limites. La différence entre les deux problèmes réside dans leur géométrie: dans le cas du problème de Rayleigh, Ω est en fait décomposé en deux espaces semi-infinis séparés par un plan infini $\partial\Omega$. L'espace étant muni d'un repère orthonormé (ox, oy, oz) , les axes sont choisis de telle sorte que l'axe oz soit normal au plan $\partial\Omega$. Par commodité, l'origine du repère est placée sur $\partial\Omega$ qui est ainsi décrit par l'équation:

$$z = 0$$

Dans ces conditions, la solution du problème s'écrit:

- dans le domaine temporel

$$p(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \vec{n} \cdot [g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0) - p(\vec{r}_0, t_0) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)] \quad (C.1)$$

- dans le domaine fréquentiel

$$p(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \vec{n} \cdot [g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, \omega) - p(\vec{r}_0, \omega) \vec{\nabla}_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega)] \quad (C.2)$$

Dans ces deux expressions, les coordonnées du vecteur \vec{r}_0 sont de la forme:

$$\vec{r}_0 \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 = 0 \end{array} \right.$$

et la normale \vec{n} est colinéaire à l'axe oz .

C.2 Choix de la fonction de Green

De la géométrie du problème découle le choix de la fonction de Green g . Elle incite en effet à utiliser, au lieu de la fonction de Green en champ libre g_∞ , la *fonction de Green* en espace semi-infini vérifiant sur le plan $\partial\Omega$ soit la condition de Dirichlet homogène (cf. Equ. A.13 ou A.17), soit la condition de Neumann de homogène (cf. Equ. A.14 ou A.18). Imposer ces conditions revient à substituer dans le problème de Green au plan $\partial\Omega$ une paroi *parfaitement réfléchissante* — condition de Neumann: annulation de la vitesse particulière et doublement de la pression — ou *parfaitement souple* — condition de Dirichlet: annulation de la pression et doublement de la vitesse particulière —. Ce choix est possible puisque les conditions limites du problème de Green sont fixées indépendamment du problème initial.

Les fonctions de Green en espace semi-infini sont exprimées à partir de la fonction de Green en champ libre en appliquant la *méthode des sources images*. On rappelle que la fonction de Green $g(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$ représente la pression induite au point \vec{r} par un monopôle impulsif situé en \vec{r}_0 . Lorsque ce monopôle est placé dans un espace semi-infini limité par un plan parfaitement réfléchissant, au point \vec{r} se superposent l'onde directe et la réflexion générée par la surface réfléchissante. Or, cette réflexion peut être vue comme l'onde émise par une source située au point symétrique de \vec{r}_0 par rapport au plan $\partial\Omega$, soit \vec{r}_0' , et qui constitue

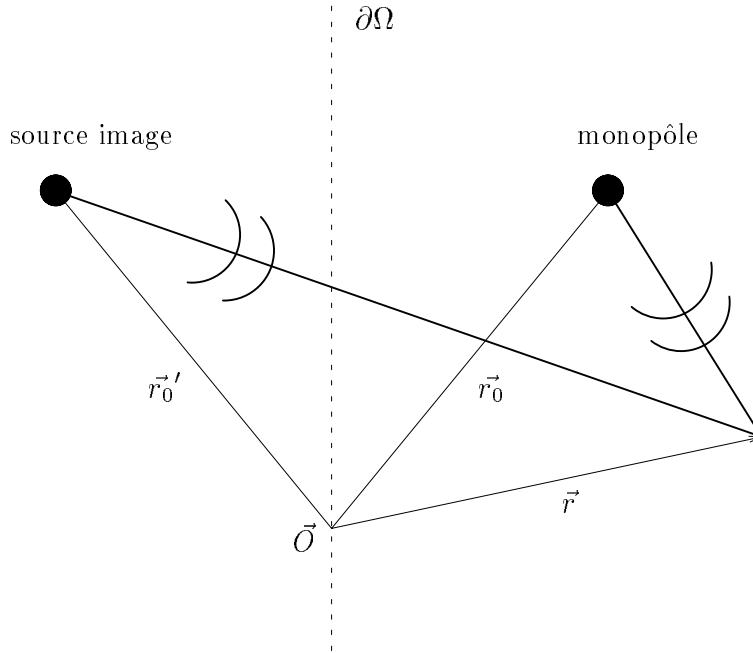


FIG. C.1 - Calcul de la fonction de Green en espace semi-infini par la méthode des sources images

la source image du monopôle (cf. Fig. C.1). Par suite, il est équivalent de considérer un monopôle rayonnant dans un espace semi-infini ou deux monopôles — la source réelle et sa source image — rayonnant dans l'espace infini, le plan $\partial\Omega$ étant virtuellement supprimé. Dans le second cas, l'onde rayonnée par chacun de deux monopôles correspond à la fonction de Green en champ libre. La fonction de Green en espace semi-infini vérifiant la condition de Neumann, soit g_1 , s'obtient donc en sommant les ondes induites par le monopôle situé en \vec{r}_0 et sa source image en \vec{r}_0' :

$$g_1(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = \frac{\delta(\frac{R}{c} - \tau)}{4\pi R} + \frac{\delta(\frac{R'}{c} - \tau)}{4\pi R'} \quad (\text{C.3})$$

avec :

$$\begin{cases} R = |\vec{r} - \vec{r}_0|, \\ R' = |\vec{r} - \vec{r}_0'|, \\ \tau = t - t_0. \end{cases}$$

Dans le cas d'une paroi parfaitement réfléchissante, la réflexion se fait sans changement de signe. Si la surface est au contraire parfaitement souple, l'onde réfléchie subit un changement de signe. Pour calculer la fonction de Green en espace semi-infini satisfaisant la condition de Dirichlet, soit la fonction de Green g_2 , on applique donc la même méthode que précédemment en ayant soin d'affecter un signe négatif à la contribution de la source image :

$$g_2(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = \frac{\delta(\frac{R}{c} - \tau)}{4\pi R} - \frac{\delta(\frac{R'}{c} - \tau)}{4\pi R'} \quad (\text{C.4})$$

L'expression des fonctions de Green g_1 et g_2 se simplifie lorsque le point \vec{r}_0 appartient au plan $\partial\Omega$. En ce cas, le monopôle et sa source image par rapport à $\partial\Omega$ sont en effet confondus et il vient :

$$\begin{cases} g_1(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) &= 2 \times g_\infty(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = \frac{\delta(\frac{R}{c} - \tau)}{2\pi R} \\ g_2(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) &= 0 \end{cases} \quad \text{si } \vec{r}_0 \in \partial\Omega$$

On vérifie bien que, sur la frontière $\partial\Omega$, la pression est doublée dans le premier cas (g_1), tandis qu'elle s'annule dans le second (g_2). Ces résultats sont utilisés dans l'intégrale de l'équation C.1 puisque le point \vec{r}_0

décrit le plan $\partial\Omega$. On a aussi besoin de connaître le gradient des fonctions g_1 et g_2 évalués sur $\partial\Omega$ [Bruneau, 1983]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}_0 g_1(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = 0 \\ \vec{\nabla}_0 g_2(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = 2 \times \vec{\nabla}_0 g_\infty(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) = -\frac{\vec{R}}{2\pi c R^2} \delta'(\frac{R}{c} - \tau) + \frac{\vec{R}}{2\pi R^3} \delta(\frac{R}{c} - \tau) \end{array} \right| \text{ si } \vec{r}_0 \in \partial\Omega$$

Comme prévu, sur la frontière $\partial\Omega$, la vitesse particulière s'annule dans le premier cas ($\vec{\nabla}_0 g_1$) et est doublée dans le second ($\vec{\nabla}_0 g_2$). En outre, ces calculs permettent de vérifier que les fonctions de Green g_1 et g_2 satisfont respectivement à la condition de Dirichlet et de Neumann sur $\partial\Omega$.

L'intégrale de Rayleigh I est obtenue en appliquant dans l'équation C.1 la fonction de Green g_1 . Comme son gradient s'annule sur $\partial\Omega$, il ne reste que le premier terme de l'intégrand:

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0) g_1(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 \vec{n} \cdot \left[\vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0) \frac{\delta(\frac{R}{c} - \tau)}{2\pi R} \right] \end{aligned} \quad (C.5)$$

qui, une fois effectuée l'intégration sur le temps en appliquant la définition de la distribution de Dirac, devient:

$$p(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \left[\vec{n} \cdot \frac{\vec{\nabla}_0 p(\vec{r}_0, t_0)}{R} \right]_{t_0=t-\frac{R}{c}} \quad (C.6)$$

Pour l'intégrale de Rayleigh II, on procède de la même façon en substituant à g_1 la fonction de Green g_2 dans l'équation C.1. La fonction g_2 s'annulant sur $\partial\Omega$, il ne reste cette fois que le second terme de l'intégrand:

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 p(\vec{r}_0, t_0) \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_0 g_2(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \int_{t_1}^{t_2} dt_0 p(\vec{r}_0, t_0) \vec{n} \cdot \left[\frac{\vec{R}}{2\pi c R^2} \delta'(\frac{R}{c} - \tau) - \frac{\vec{R}}{2\pi R^3} \delta(\frac{R}{c} - \tau) + \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \vec{n} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \left[\frac{1}{cR} \frac{\partial p(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t_0} + \frac{1}{R^2} p(\vec{r}_0, t_0) \right]_{t_0=t-\frac{R}{c}} \end{aligned} \quad (C.7)$$

Les expressions dans le domaine fréquentiel des deux intégrales de Rayleigh peuvent être obtenues soit à partir de l'équation C.2 dans laquelle on introduit les fonctions de Green fréquentielles g_1 ou g_2 , soit directement par transformée de Fourier des intégrales temporelles C.6 et C.7. Ces calculs n'apportant pas d'élément nouveau, nous ne les développerons pas ici.

C.3 Propriétés de l'intégrale de Rayleigh

Bien qu'elle dérive d'une approche similaire à l'intégrale de Kirchhoff, l'intégrale de Rayleigh s'en distingue par des propriétés spécifiques liées à la géométrie de la partition de l'espace et au choix de la fonction de Green.

Dans la représentation de Rayleigh, la distribution des sources secondaires est simplifiée puisqu'une seule catégorie de transducteurs — monopolaires ou dipolaires — est nécessaire. Mais on perd la distinction entre les deux sous-espaces Ω_1 et Ω_2 . On a vu que l'intégrale de Kirchhoff s'annule pour des sources primaires situées dans l'espace de restitution. Or l'intégrale de Rayleigh ne possède plus cette propriété, le choix de la fonction de Green symétrise en effet le problème de telle sorte que l'espace Ω_1 est l'exacte réplique de Ω_2 . Deux conséquences en découlent:

- à la *restitution*, les sources secondaires — de directivité monopolaire ou dipolaire — rayonnent la même onde de part et d'autre du plan $\partial\Omega$ et leur émission perturbe donc l'onde primaire,

- à la *prise de son*, il est impossible de discriminer deux sources primaires placées symétriquement des deux côté de $\partial\Omega$, par suite, on ne peut s'affranchir de la contribution d'une source primaire présente dans l'espace de restitution.

Références Bibliographiques

BRUNEAU M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans.

Table des Illustrations

C.1	Calcul de la fonction de Green en espace semi-infini par la méthode des sources images . . .	400
-----	--	-----

Annexe D

Approximation de la phase stationnaire

Sommaire

D.1 Principe	407
D.2 Dérivation de la limite asymptotique de l'intégrale	409
D.3 Application aux intégrales de Kirchhoff et Rayleigh	409
D.3.1 Validité de l'approximation	409
D.3.2 Point de phase stationnaire	410
D.3.3 Approximation de l'intégrale	410
Références Bibliographiques	411

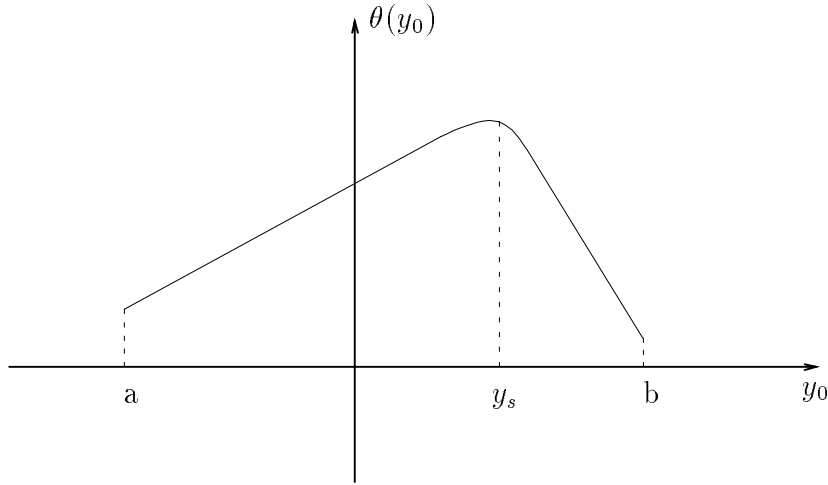


FIG. D.1 - Exemple typique de l'évolution de la phase $\phi(y_0)$ (y_s repère le point de phase stationnaire)

D.1 Principe

La méthode de la phase stationnaire a été développée pour évaluer des intégrales de la forme:

$$I(\lambda) = \int_a^b f(y_0) e^{j\lambda\phi(y_0)} dy_0 \quad (\text{D.1})$$

où a , b , $f(y_0)$, $\phi(y_0)$, y_0 et λ prennent des valeurs réelles. Dans cette expression, on remarque la forme particulière de l'intégrand. Le terme $e^{j\lambda\phi(y_0)}$ est purement oscillatoire, le paramètre λ jouant le rôle du facteur de dilatation des oscillations. Ainsi, lorsque λ est grand, ce terme décrit de nombreuses oscillations sur l'intervalle d'intégration $[a, b]$. On prévoit donc qu'en ce cas, les oscillations positives et négatives vont s'annuler dans l'intégration et qu'il est possible d'exploiter ces résultats pour approcher la valeur de l'intégrale et définir sa limite asymptotique ($\lambda \rightarrow \infty$)...

Nous allons préciser cette idée à partir des figures D.1 et D.2. La figure D.1 montre un exemple typique d'évolution d'un terme de phase $\phi(y_0)$. L'abscisse y_s repère le point de phase stationnaire qui correspond au maximum de la fonction $\phi(y_0)$. Pour cet exemple, la figure D.2 reproduit les variations du terme $\cos[\lambda\phi(y_0)]$ associé à une faible ($\lambda = 1$) et à une grande ($\lambda = 10$) valeur de λ . Dans le second cas, on se rend compte que, dès que le nombre d'oscillations devient important, les alternances positives et négatives se compensent lorsque l'on intègre la fonction $\cos[\lambda\phi(y_0)]$, de telle sorte qu'il ne reste que la contribution du voisinage du point stationnaire et des bornes de l'intervalle d'intégration (cf. Fig. D.2). Par suite, une valeur approchée de l'intégrale est obtenue en restreignant le domaine d'intégration au voisinage de ces trois points. En fait, on montre au moyen d'une intégration par parties que la contribution des bornes a et b est en $\frac{1}{\lambda}$, alors que celle du point stationnaire est en $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Pour λ grand, cette dernière prédomine donc et la limite asymptotique de l'intégrale $I(\lambda)$ s'écrit:

$$I(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y_s - \epsilon}^{y_s + \epsilon} f(y_0) e^{j\lambda\phi(y_0)} dy_0 \quad (\text{D.2})$$

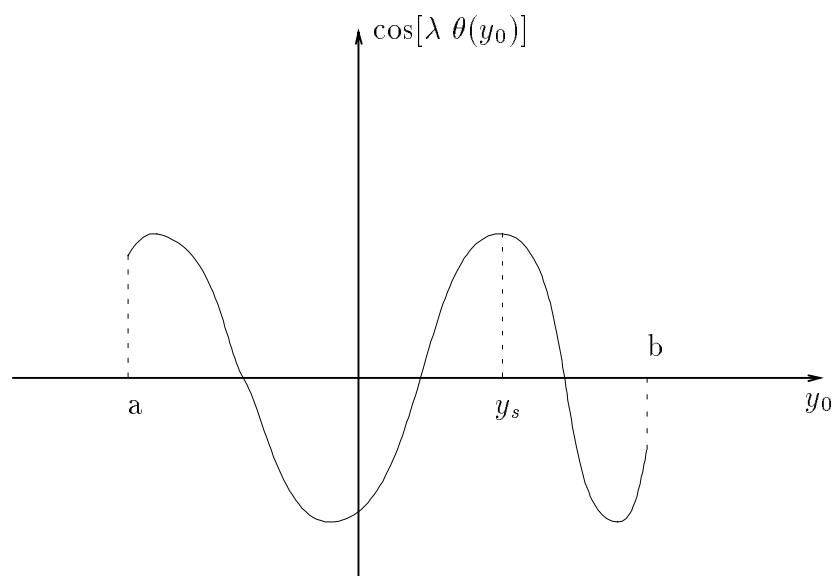
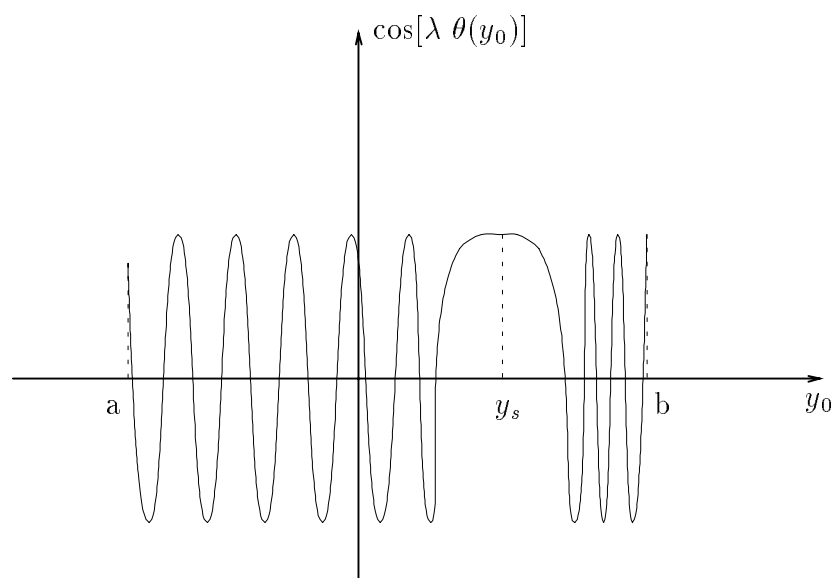

 (a) $\lambda = 1$

 (b) $\lambda = 10$

 FIG. D.2 - Tracé de la fonction $\cos[\lambda \phi(y_0)]$ pour deux valeurs de λ : Illustration du principe de l'approximation de la phase stationnaire

D.2 Dérivation de la limite asymptotique de l'intégrale

L'intégrale de l'équation D.2 est évaluée à partir d'un développement limité — développement de Taylor — de l'intégrand au voisinage du point stationnaire y_s :

$$f(y_0) e^{j\lambda\phi(y_0)} \simeq f(y_s) e^{j\lambda[\phi(y_s) + \frac{1}{2} \phi''(y_s) (y_0 - y_s)^2]}$$

Dans le développement du terme de phase, le terme du premier ordre disparaît puisque, par définition du point de phase stationnaire, on a :

$$\phi'(y_s) = 0 \quad .$$

Par suite, il vient :

$$I(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y_s - \epsilon}^{y_s + \epsilon} f(y_s) e^{j\lambda[\phi(y_s) + \frac{1}{2} \phi''(y_s) (y_0 - y_s)^2]} dy_0 \quad (\text{D.3})$$

Grâce à plusieurs changements de variable [Murray, 1974], on se ramène à une intégrale de la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j\eta^2} d\eta$$

qui se calcule en appliquant le théorème de Cauchy [Murray, 1974] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi} e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

Finalement, on obtient :

$$I(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\phi''(y_s)|}} f(y_s) e^{j\lambda\phi(y_s) + \text{sign}[\phi''(y_s)] \frac{\pi}{4}} \quad (\text{D.4})$$

Cette expression constitue la limite asymptotique de l'intégrale $I(\lambda)$ et définit l'approximation de la Phase Stationnaire.

D.3 Application aux intégrales de Kirchhoff et Rayleigh

D.3.1 Validité de l'approximation

Dans le cadre des intégrales de Kirchhoff et Rayleigh, l'approximation de la phase stationnaire est appliquée à une intégrale de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_0) e^{j\phi(y_0)} dy_0$$

où le terme de phase s'écrit :

$$\phi(y_0) = -k(R_1 + R_2)$$

avec¹ :

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{(x_0 - x_m)^2 + (y_0 - y_m)^2 + (z_0 - z_m)^2} \\ R_2 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} \end{cases}$$

En ce cas, la condition sur λ n'intervient pas dans la mesure où les bornes d'intégration sont repoussées à l'infini. En effet, lorsque la variable y_0 tend vers l'infini, le terme $e^{j\phi(y_0)}$ présente une infinité d'oscillations, ce qui justifie l'approximation de la phase stationnaire :

$$I \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(y_s)|}} f(y_s) e^{j\{\phi(y_s) + \text{sgn}[\phi''(y_s)] \frac{\pi}{4}\}} \quad (\text{D.5})$$

1. On rappelle que les vecteurs \vec{r}_m , \vec{r}_0 et \vec{r} repèrent respectivement les positions de la source primaire, d'une source secondaire et du point d'écoute.

D.3.2 Point de phase stationnaire

On veut expliciter l'équation D.5. Dans ce but, nous allons déterminer le point de phase stationnaire. Le terme de phase s'exprime:

$$\phi(y_0) = -k[\sqrt{(x_0 - x_m)^2 + (y_0 - y_m)^2 + (z_0 - z_m)^2} + \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}]$$

On calcule ses dérivées première et seconde relativement à y_0 :

$$\begin{cases} \phi'(y_0) = -k \left(\frac{y_0 - y_m}{R_1} + \frac{y_0 - y}{R_1} \right) , \\ \phi''(y_0) = -k \left[\frac{(x_0 - x_m)^2 + (z_0 - z_m)^2}{R_1^3} + \frac{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2}{R_2^3} \right] \end{cases}$$

La condition:

$$\phi'(y_0) = 0$$

donne:

$$y_s = \frac{R_1 y + R_2 y_m}{R_1 + R_2}$$

Dans le cas où la source primaire et le point d'écoute appartiennent au même plan horizontal, soit le plan défini par:

$$y = 0$$

on vérifie que:

$$y_s = 0$$

c'est-à-dire que le point de phase stationnaire appartient aussi à ce plan. Dans tout ce qui suit, on se limite à ce cas, ce qui simplifié avantageusement les calculs.

D.3.3 Approximation de l'intégrale

Avec:

$$y_m = y = y_s = 0$$

on obtient:

$$\begin{cases} R_{1_s} = R_1 |_{y_0=y_s} = \sqrt{(x_0 - x_m)^2 + (z_0 - z_m)^2} \\ R_{2_s} = R_2 |_{y_0=y_s} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2} \end{cases}$$

Par suite, il vient:

$$\phi''(y_s) = -k \left(\frac{1}{R_{1_s}} + \frac{1}{R_{2_s}} \right)$$

En reportant ces résultats dans l'équation D.5, on en déduit l'expression approchée de l'intégrale I :

$$I \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{jk}} \sqrt{\frac{R_{1_s} R_{2_s}}{R_{1_s} + R_{2_s}}} f(y_s) e^{-jk(R_{1_s} + R_{2_s})} \quad (\text{D.6})$$

Références Bibliographiques

MURRAY J. D. (1974). *Asymptotic Analysis*. Clarendon Press, Oxford. Chap. 4.

Table des Illustrations

D.1	Exemple typique de l'évolution de la phase $\phi(y_0)$ (y_s repère le point de phase stationnaire)	407
D.2	Tracé de la fonction $\cos[\lambda\phi(y_0)]$ pour deux valeurs de λ : Illustration du principe de l'approximation de la phase stationnaire	408

Annexe E

Routines Matlab de simulation de l'holophonie

Sommaire

E.1	Introduction	415
E.2	Intégrale de Rayleigh I	416
E.3	Intégrale de Rayleigh II	418
E.4	Intégrale de Rayleigh I avec l'approximation de la Phase Stationnaire	420
E.5	Intégrale de Rayleigh II avec l'approximation de la Phase Stationnaire	423
E.6	Intégrale de Rubinowicz	426

E.1 Introduction

Cette annexe reproduit les routines Matlab utilisées pour simuler le procédé holophonique et qui ont été développées par l'auteur au cours du travail de thèse.


```
ny = N(2,:) ;  
nz = N(3,:) ;  
  
% Position des recepteurs  
xr = Rr(1,:) ;  
yr = Rr(2,:) ;  
zr = Rr(3,:) ;  
  
Nr = size(Rr,2) ;  
  
% Points frequentiels  
K = pi * Fe / 340. ;  
k1 = linspace(0,K, Nf/2 + 1 ) ;  
k2 = linspace(-K,0, Nf/2 + 1 ) ;  
k(1,1,:) = [k1(1:(Nf/2)),0.,k2(2:(Nf/2))] ;  
  
% &&&&&&&&&&&&&&& CALCULS  
  
% Distance source laire / srcees 2aires  
D1 = sqrt( (x2-x1).^2 + (y2-y1).^2 + (z2-z1).^2 ) ;  
  
% Distance sources 2aires / recepteurs  
D2 = ( repmat(xr, [Ns 1]) - repmat((x2.'), [1 Nr])).^2 ;  
D2 = D2 + ( repmat(yr, [Ns 1]) - repmat((y2.'), [1 Nr])).^2 ;  
D2 = D2 + ( repmat(zr, [Ns 1]) - repmat((z2.'), [1 Nr])).^2 ;  
D2 = sqrt(D2) ;  
  
% Angle sources 2aires / recepteurs  
C2 = ( repmat(xr, [Ns 1])-repmat((x2.'), [1 Nr])) .* repmat((nx.'), [1 Nr]) ;  
C2 = C2 + ( repmat(yr, [Ns 1]) - repmat((y2.'), [1 Nr])) .* repmat((ny.'), [1 Nr]) ;  
C2 = C2 + ( repmat(zr, [Ns 1]) - repmat((z2.'), [1 Nr])) .* repmat((nz.'), [1 Nr]) ;  
  
jkD2 = j .* ( repmat(k, [Ns Nr 1]) .* repmat(D2, [1 1 Nf]) ) ;  
  
D = repmat((D1.'), [1 Nr]) + D2 ;  
jkD = j .* ( repmat(k, [Ns Nr 1]) .* repmat(D, [1 1 Nf]) ) ;  
  
% Pression induite par l'ensemble des sources secondaires  
P = - ( C2 ./ (D2.^3)) ./ repmat((D1.'), [1 Nr]) ;  
P = repmat(P, [1 1 Nf]) .* repmat(H, [Ns Nr 1]) ;  
P = P .* (1 + jkD2) .* exp( - jkD ) ;  
  
% Sommaton des contributions des sources secondaires  
P = sum(P,1) ;  
P = shiftdim(P,1) ;  
  
% Retour dans le domaine temporel  
p = ifft(P,Nf,2) ;  
p = real(p) ;  
p = ( dl / (2*pi) ) .* p ;
```



```
P = repmat((P.'), [1 Nr]) ./ D2 ;
P = repmat(P, [1 1 Nf]) .* repmat(H, [Ns Nr 1]) ;
P = P .* (1 + repmat(jkD1, [1 Nr 1])) .* exp( - jkD ) ;

% approximation de la phase stationnaire
P = P .* repmat(sqrt( repmat((D1.'), [1 Nr]) .* D2) ./ D), [1 1 Nf]) ;
P = P .* repmat(E, [Ns Nr 1]) ;

% Sommmation des contributions des sources secondaires
P = sum(P,1) ;
P = shiftdim(P,1) ;

% Retour dans le domaine temporel
p = ifft(P,Nf,2) ;
p = real(p) ;
p = ( dl / sqrt(2*pi) ) .* p ;
```

```
% Position des sources secondaires
x2 = R2(1,:) ;
```

```
y2 = R2(2,:) ;  
z2 = R2(3,:) ;  
  
Ns = size(R2,2) ;  
  
% Normale  
nx = N(1,:) ;  
ny = N(2,:) ;  
nz = N(3,:) ;  
  
% Position des recepteurs  
xr = Rr(1,:) ;  
yr = Rr(2,:) ;  
zr = Rr(3,:) ;  
  
Nr = size(Rr,2) ;  
  
% Points frequentiels  
K = pi * Fe / 340. ;  
k1 = linspace(0,K, Nf/2 + 1 ) ;  
k2 = linspace(-K,0, Nf/2 + 1 ) ;  
k(1,1,:) = [k1(1:(Nf/2)),0.,k2(2:(Nf/2))] ;  
  
% &&&&&&&&&&&&&&&&& CALCULS  
  
% Distance source laire / srces 2aires  
D1 = sqrt( (x2-x1).^2 + (y2-y1).^2 + (z2-z1).^2 ) ;  
  
% Distance sources 2aires / recepteurs  
D2 = ( repmat(xr, [Ns 1]) - repmat((x2.'), [1 Nr])).^2 ;  
D2 = D2 + ( repmat(yr, [Ns 1]) - repmat((y2.'), [1 Nr])).^2 ;  
D2 = D2 + ( repmat(zr, [Ns 1]) - repmat((z2.'), [1 Nr])).^2 ;  
D2 = sqrt(D2) ;  
  
% Angle sources 2aires / recepteurs  
C2 = ( repmat(xr, [Ns 1])-repmat((x2.'), [1 Nr])) .* repmat((nx.'), [1 Nr]) ;  
C2 = C2 + ( repmat(yr, [Ns 1]) - repmat((y2.'), [1 Nr])) .* repmat((ny.'), [1 Nr]) ;  
C2 = C2 + ( repmat(zr, [Ns 1]) - repmat((z2.'), [1 Nr])) .* repmat((nz.'), [1 Nr]) ;  
  
jkD2 = j .* ( repmat(k, [Ns Nr 1]) .* repmat(D2, [1 1 Nf]) ) ;  
  
D = repmat((D1.'), [1 Nr]) + D2 ;  
jkd = j .* ( repmat(k, [Ns Nr 1]) .* repmat(D, [1 1 Nf]) ) ;  
  
% Correction de la phase stationnaire (theorique)  
E(1,1,1) = 0. ;  
E(1,1,2:(Nf/2)) = 1 ./ ( sqrt(j) * sqrt(k(1,1,2:(Nf/2)))) ;  
E(1,1,(Nf/2)+1) = 0. ;  
  
Eneg = flipdim(E(1,1,2:(Nf/2)),3) ;  
E(1,1,((Nf/2)+2):Nf) = real(Eneg) - j * imag(Eneg) ;  
  
% Pression induite par l'ensemble des sources secondaires
```

```
P = - ( C2 ./ (D2.^3)) ./ repmat((D1.'), [1 Nr]) ;
P = repmat(P, [1 1 Nf]) .* repmat(H, [Ns Nr 1]) ;
P = P .* (1 + jkD2) .* exp( - jkD ) ;

% approximation de la phase stationnaire
P = P .* repmat(sqrt( repmat((D1.'), [1 Nr]) .* D2) ./ D), [1 1 Nf]) ;
P = P .* repmat(E, [Ns Nr 1]) ;

% Sommaton des contributions des sources secondaires
P = sum(P,1) ;
P = shiftdim(P,1) ;

% Retour dans le domaine temporel
p = ifft(P,Nf,2) ;
p = real(p) ;
p = ( dl / sqrt(2*pi) ) .* p ;
```

426


```
P = repmat(H, [Ns Nr 1]) .* repmat(P, [1 1 Nf]) .* exp(- jkDs) ;

% Sommmation des contributions des sources secondaires
P = sum(P,1) ;
P = shiftdim(P,1) ;

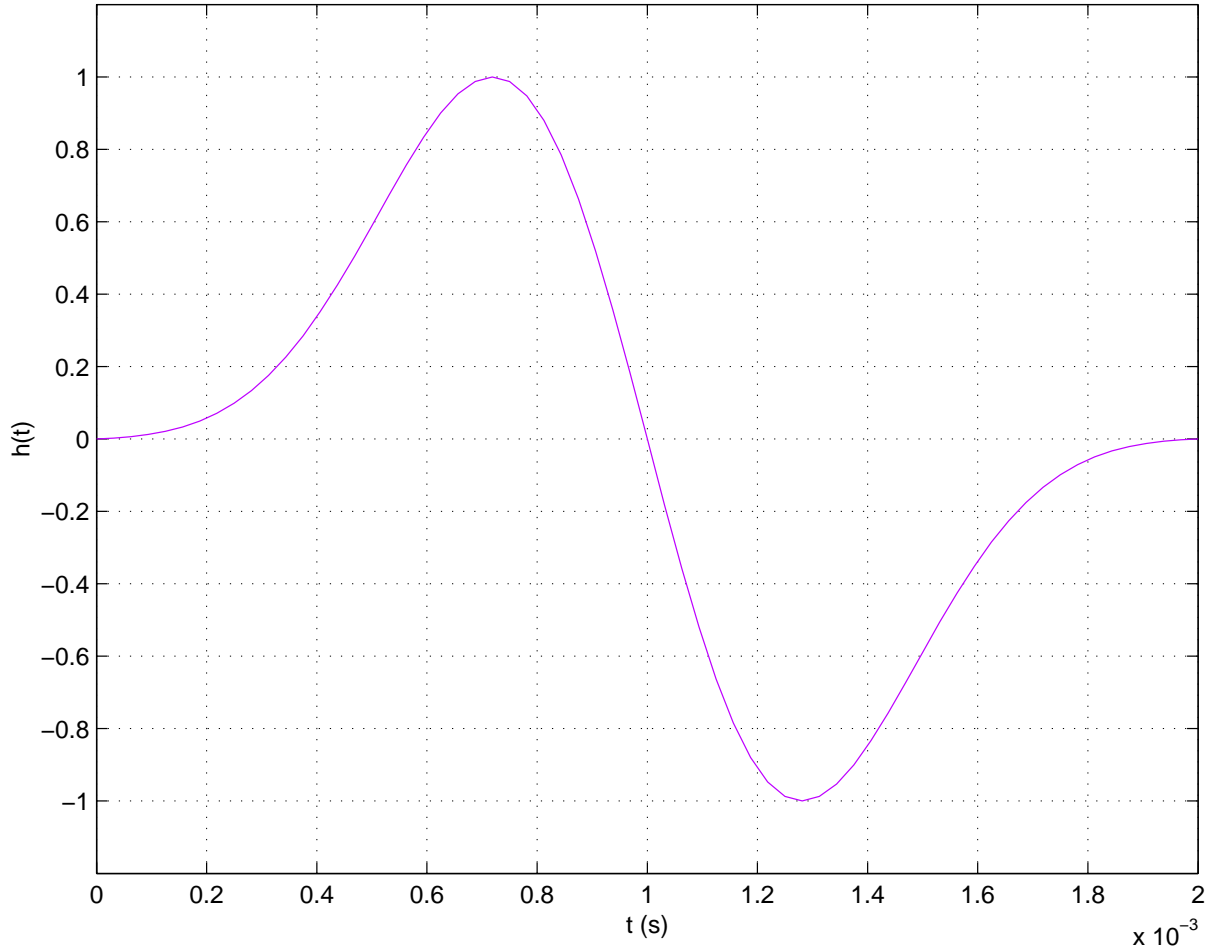
% Retour dans le domaine temporel
p = ifft(P,Nf,2) ;
p = real(p) ;
p = p / (4*pi) ;
```


Annexe F

Impulsion Gaussienne

Sommaire

F.1 Définition	431
F.2 Spectre	432
Références Bibliographiques	433


 FIG. F.1 - Impulsion gaussienne: Signal temporel ($f_0 = 500$ Hz)

F.1 Définition

Dans le cadre des simulations et des mesures du prototype holophonique, le signal émis est une *impulsion gaussienne* qui correspond à un sinus fenêtré sur une période et pondéré par une gaussienne [Start, 1997] [Verheijen, 1997]. Ce choix définit une impulsion dont le support est compact à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel grâce aux propriétés de la gaussienne. Il en résulte une visualisation optimale du front d'onde sur les représentations spatio-temporelles de l'onde de pression pour les simulations ou les mesures.

L'impulsion gaussienne s'exprime sous la forme:

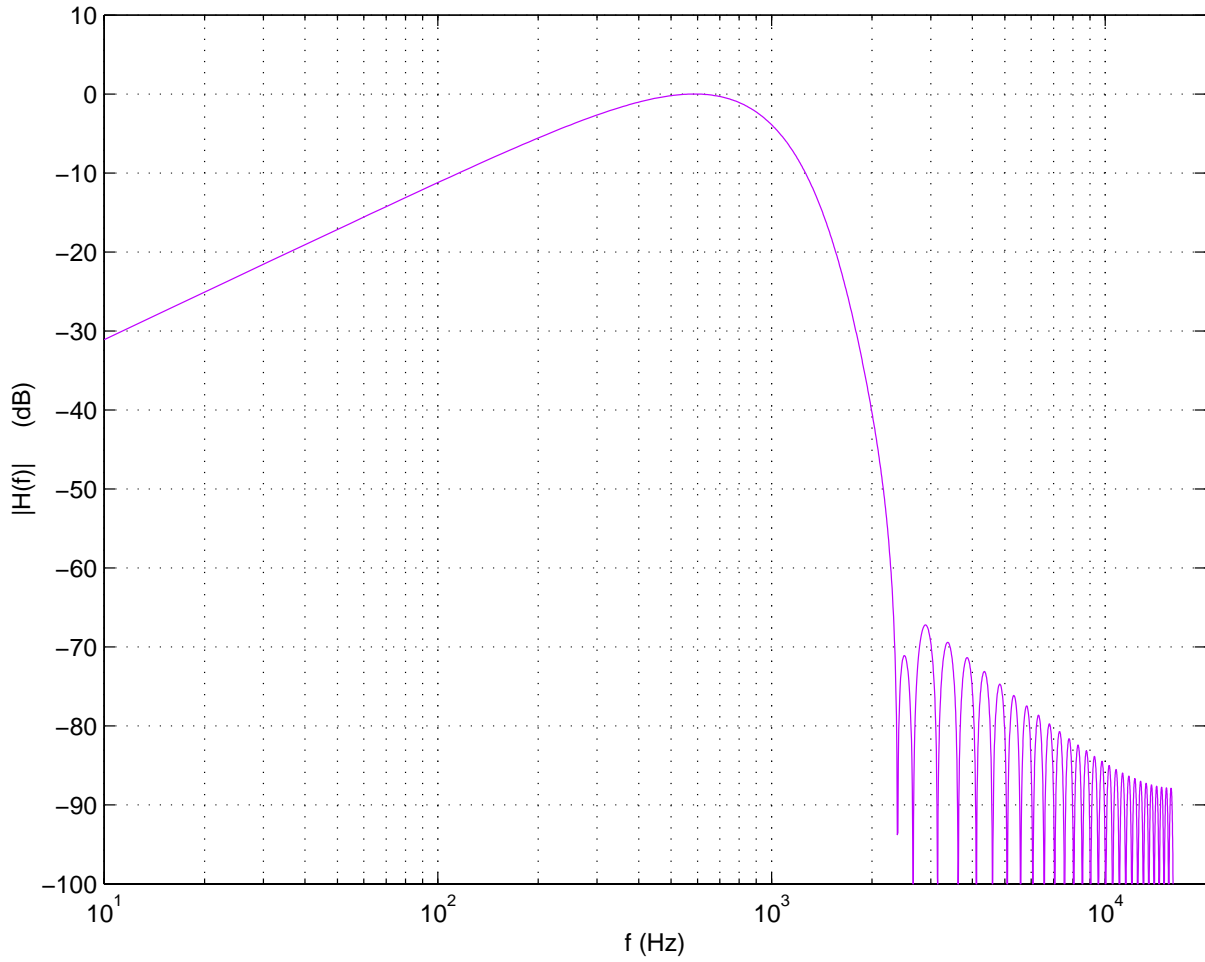
$$h(t) = \frac{1}{h_0} e^{-a(t-\frac{T_0}{2})^2} \sin(2\pi f_0 t) \text{Rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) \quad (\text{F.1})$$

Dans cette expression, le paramètre f_0 désigne la fréquence du sinus et T_0 est la période associée:

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

Le terme h_0 est un facteur de normalisation afin que le maximum de $h(t)$ soit systématiquement ramené à la valeur de 1:

$$h_0 = \max_{t \in [0, T_0]} \left[e^{-a(t-\frac{T_0}{2})^2} \sin(2\pi f_0 t) \right] \quad (\text{F.2})$$


 FIG. F.2 - Impulsion gaussienne: Spectre fréquentiel ($f_0 = 500$ Hz)

Enfin, le paramètre a détermine la décroissance de la gaussienne. Dans le cadre de nos applications, il a été fixé à :

$$a = 8 \ln(10) f_0^2 \quad (\text{F.3})$$

L'allure de l'impulsion gaussienne obtenue pour la fréquence $f_0 = 500$ Hz est reproduite sur la figure F.1.

F.2 Spectre

Le spectre d'une fonction sinus comporte deux raies en $f = \pm f_0$:

$$TF[\sin(2\pi f_0 t)](f) = \frac{j}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \quad (\text{F.4})$$

Lorsque le sinus est tronqué à une période T_0 avec une pondération gaussienne, son spectre s'élargit à deux bandes spectrales centrées sur ces deux raies. On obtient ainsi une impulsion à bande spectrale limitée centrée sur les fréquences $f = \pm f_0$. Son spectre est illustré sur la figure F.2.

Références Bibliographiques

START E. (1997). *Direct Sound Enhancement by Wave Field Synthesis*. Ph.D. Thesis, Faculty of Applied Physics, Delft, Pays-Bas.

VERHEIJEN E. (1997). *Sound reproduction by wave field synthesis*. Ph.D. Thesis, Faculty of Applied Physics, Delft, Pays-Bas.

Table des Illustrations

F.1	Impulsion gaussienne: Signal temporel ($f_0 = 500$ Hz)	431
F.2	Impulsion gaussienne: Spectre fréquentiel ($f_0 = 500$ Hz)	432

Annexe G

Spectre spatial d'une onde sphérique

Sommaire

G.1 Spectre 3D	437
G.2 Spectre 2D	438
G.2.1 Calcul de la première intégrale I_1	439
1^{er} cas: $\chi_x^2 + \chi_y^2 < k^2$	440
2^e cas: $\chi_x^2 + \chi_y^2 > k^2$	440
3^e cas: $\chi_x^2 + \chi_y^2 = k^2$	440
G.2.2 Calcul de la seconde intégrale I_2	440
Références Bibliographiques	442

G.1 Spectre 3D

Un monopôle acoustique induit une onde sphérique dont le signal de pression est décrit en fonction des coordonnées d'espace $\vec{r}(x, y, z)$ par [Bruneau, 1983]:

$$g(\vec{r}) = a_s \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \quad (\text{G.1})$$

avec:

$$r = |\vec{r}|$$

On a considéré ici une source située à l'origine $\vec{r}(0, 0, 0)$ et qui émet un signal monochromatique de fréquence f correspondant à un nombre d'onde k donné par:

$$k = \frac{2\pi f}{c}$$

Le spectre spatial de l'onde sphérique est obtenu en appliquant à la fonction $g(\vec{r})$ une transformée de Fourier à 3 dimensions par rapport à ses coordonnées d'espace, selon la formule suivante:

$$G_{3D}(\vec{\chi}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}) e^{-j\vec{\chi} \cdot \vec{r}} dx dy dz \quad (\text{G.2})$$

Pour calculer cette intégrale, on substitue les coordonnées sphériques $\vec{r}(r, \varphi, \theta)$ aux coordonnées cartésiennes $\vec{r}(x, y, z)$ [Johnson & Dudgeon, 1993]:

$$\begin{aligned} G_{3D}(\vec{\chi}) &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(r) e^{-jr(\chi_x \sin \theta \cos \varphi + \chi_y \sin \theta \sin \varphi + \chi_z \cos \theta)} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= a_s \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{jkr}}{4\pi r} e^{-jr(\chi_x \sin \theta \cos \varphi + \chi_y \sin \theta \sin \varphi + \chi_z \cos \theta)} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Il est intéressant de remarquer que la fonction g ne dépend pas des angles φ et θ , mais seulement du rayon r , c'est-à-dire qu'elle présente une symétrie sphérique. On en déduit que son spectre G_{3D} présente également une symétrie sphérique et, par suite, il n'est pas nécessaire de l'évaluer dans tout l'espace [Johnson & Dudgeon, 1993]. Il suffit en effet de le connaître le long d'une ligne issue de l'origine $\vec{\chi}(0, 0, 0)$ et, par symétrie, on peut étendre ce résultat à n'importe quelle ligne issue de l'origine. Nous allons exprimer l'intégrale précédente (cf. Equ. G.3) en se limitant à des points $\vec{\chi}$ situés le long de l'axe $o\vec{\chi}_z$, ce qui revient à prendre:

$$\begin{cases} \chi_x &= 0 \\ \chi_y &= 0 \\ \chi_z &= |\vec{\chi}| = \chi \end{cases}$$

Il vient:

$$G_{3D}(\chi) = a_s \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{jkr}}{4\pi r} e^{-jr\chi \cos \theta} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \quad (\text{G.4})$$

Les intégrales sur les angles φ et θ se calculent sans difficulté:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad (\text{G.5})$$

$$\int_0^\pi e^{-jr\chi \cos \theta} \sin \theta d\theta = \left[\frac{e^{-jr\chi \cos \theta}}{-jr\chi} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 2 \frac{\sin(r\chi)}{r\chi} \quad (\text{G.6})$$

Il reste l'intégrale portant sur le rayon r :

$$G_{3D}(\chi) = \frac{a_s}{\chi} \int_0^\infty e^{jkr} \sin(r\chi) dr \quad (\text{G.7})$$

On y reconnaît la transformée de Fourier d'une fonction sinus $\sin(r\chi)$ multipliée par un échelon de Heaviside $u(r)$:

$$G_{3D}(\chi) = \frac{a_s}{\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jkr} \sin(r\chi) u(r) dr \quad (\text{G.8})$$

Dans le domaine de Fourier, le produit simple devient un produit de convolution, ainsi, si $S(k)$ et $U(k)$ désignent les transformées de ces deux fonctions, il vient:

$$G_{3D} = \frac{a_s}{\chi} U * S \quad (\text{G.9})$$

Les transformées de Fourier S et U sont données par [Reinhard, 1989]:

$$\begin{cases} S(k) &= \frac{1}{2j} [\delta(k - \chi) - \delta(k + \chi)] \\ U(k) &= \frac{1}{2} \delta(k) - \frac{1}{2j\pi k} \end{cases} \quad (\text{G.10})$$

Finalement le spectre spatial de l'onde sphérique s'écrit donc [Johnson & Dudgeon, 1993]:

$$G_{3D}(\chi) = \frac{a_s \pi}{j2\chi} [\delta(\chi - k) - \delta(\chi + k)] + \frac{1}{\chi^2 - k^2} \quad (\text{G.11})$$

Comme k et χ n'admettent que des valeurs positives, il est possible d'omettre le second terme $\delta(\chi + k)$.

G.2 Spectre 2D

Si l'onde sphérique est évaluée sur un plan $z = z_0$, on peut calculer son spectre 2D qui s'obtient par une transformée de Fourier à deux dimensions appliquée sur le couple de coordonnées d'espace (x, y) :

$$G_{2D}(\chi_x, \chi_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r})|_{z=z_0} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} dx dy \quad (\text{G.12})$$

Le spectre 2D peut aussi se déduire du spectre 3D. Par transformée de Fourier inverse, on est en effet capable d'exprimer la pression $g(\vec{r})$ à partir de son spectre G_{3D} :

$$\begin{aligned} g(\vec{r}) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{3D}(\chi'_x, \chi'_y, \chi'_z) e^{j(\chi'_x x + \chi'_y y + \chi'_z z)} d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_s \pi}{j2\chi'} \delta(\chi' - k) + \frac{a_s}{\chi'^2 - k^2} \right] e^{j(\chi'_x x + \chi'_y y + \chi'_z z)} d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

On remplace alors g par cette expression dans le calcul du spectre G_{2D} :

$$G_{2D}(\chi_x, \chi_y) = \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} G_{3D}(\chi'_x, \chi'_y, \chi'_z) e^{j(\chi'_x x + \chi'_y y + \chi'_z z_0)} e^{-j(\chi_x x + \chi_y y)} d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z dx dy \quad (\text{G.14})$$

Le calcul des intégrales sur les coordonnées d'espace (x, y) est immédiat [Reinhard, 1989]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\chi'_x - \chi_x)x} dx = \delta(\chi'_x - \chi_x) \quad (\text{G.15})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\chi'_y - \chi_y)y} dy = \delta(\chi'_y - \chi_y) \quad (\text{G.16})$$

Il vient:

$$G_{2D}(\chi_x, \chi_y) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G_{3D}(\chi'_x, \chi'_y, \chi'_z) e^{j\chi'_z z_0} \delta(\chi_x - \chi'_x) \delta(\chi_y - \chi'_y) d\chi'_x d\chi'_y d\chi'_z \quad (\text{G.17})$$

La présence des distributions de Dirac permet d'exprimer les intégrales sur les variables χ'_x et χ'_y :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{3D}(\chi'_x, \chi'_y, \chi'_z) \delta(\chi'_x - \chi_x) d\chi'_x = G_{3D}(\chi_x, \chi'_y, \chi'_z) \quad (\text{G.18})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{3D}(\chi_x, \chi'_y, \chi'_z) \delta(\chi'_y - \chi_y) d\chi'_y = G_{3D}(\chi_x, \chi_y, \chi'_z) \quad (\text{G.19})$$

Il en résulte que le spectre G_{2D} s'exprime comme :

$$G_{2D}(\chi_x, \chi_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{3D}(\chi_x, \chi_y, \chi'_z) e^{j\chi'_z z_0} d\chi'_z \quad (\text{G.20})$$

où on reconnaît la transformée de Fourier du spectre G_{3D} appliquée sur sa troisième variable χ'_z :

$$\begin{aligned} G_{2D}(\chi_x, \chi_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_s \pi}{j2\chi'} \delta(\chi' - k) + \frac{a_s}{\chi'^2 - k^2} \right] e^{j\chi'_z z_0} d\chi'_z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_s \pi \delta(\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2} - k)}{j2\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2}} + \frac{a_s}{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2 - k^2} \right] e^{-j\chi'_z z_0} d\chi'_z \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

Cette intégrale se calcule en appliquant les propriétés de la distribution de Dirac d'une part et en utilisant les tables des transformées de Fourier d'autre part. On décompose le calcul en deux intégrales :

$$I_1 = a_s \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2} - k)}{j2\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2}} e^{-j\chi'_z z_0} d\chi'_z \quad (\text{G.22})$$

$$I_2 = a_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\chi'_z z_0}}{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2 - k^2} d\chi'_z \quad (\text{G.23})$$

L'intégrale I_1 représente la contribution des ondes planes dont le vecteur d'onde $\vec{\chi}$ pointe sur la sphère de rayon $\chi = k$, tandis que l'intégrale I_2 correspond aux ondes dont le vecteur d'onde pointe en dehors de la surface de cette sphère.

G.2.1 Calcul de la première intégrale I_1

Pour exprimer la première intégrale (cf. Equ. G.22), il faut déterminer les zéros de l'argument de la distribution de Dirac. Soit $f(\chi'_z)$ la fonction qui définit l'argument de la distribution de Dirac :

$$f(\chi'_z) = \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2} - k \quad (\text{G.24})$$

sa dérivée est donnée par :

$$f'(\chi'_z) = \frac{\chi'_z}{\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z'^2}} \quad (\text{G.25})$$

On désigne par χ'_{z_i} pour $i = [1 \dots N]$, les N zéros de la fonction $f(\chi'_z)$. On montre alors que :

$$\delta[f(\chi'_z)] = \sum_{i=1}^N \frac{\delta(\chi'_z - \chi'_{z_i})}{|f'(\chi'_{z_i})|} \quad (\text{G.26})$$

Il convient de distinguer trois cas :

$$\begin{cases} \chi_x^2 + \chi_y^2 < k^2 \\ \chi_x^2 + \chi_y^2 > k^2 \\ \chi_x^2 + \chi_y^2 = k^2 \end{cases}$$

1^{er} cas: $\chi_x^2 + \chi_y^2 < k^2$

La fonction $f(\chi'_z)$ possède deux zéros donnés par:

$$\chi'_{z_{1,2}} = \pm \sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2}$$

Il vient:

$$\begin{aligned} I_1 &= a_s \pi \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-j\chi'_{z_i} z_0}}{j2|\chi'_{z_i}|} \\ &= a_s \pi \frac{\cos(\sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2} z_0)}{\sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2}} \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

2^e cas: $\chi_x^2 + \chi_y^2 > k^2$

La fonction $f(\chi'_z)$ possède deux zéros donnés par:

$$\chi'_{z_{1,2}} = \pm j \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 - k^2}$$

On remarque que ces deux valeurs ne sont pas réelles. Comme la variable χ'_z ne prend que des valeurs réelles, il en résulte que:

$$I_1 = 0 \quad (\text{G.28})$$

3^e cas: $\chi_x^2 + \chi_y^2 = k^2$

La fonction $f(\chi'_z)$ ne présente qu'un zéro qui correspond à:

$$\chi'_{z_0} = 0$$

L'intégrale I_1 s'écrit alors:

$$\begin{aligned} I_1 &= a_s \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\chi'_z)}{j2|\chi'_z|} e^{-j\chi'_z z_0} d\chi'_z \\ &= a_s \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\chi'_z)}{j2|\chi'_z|} d\chi'_z \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

Cette intégrale soulève un problème d'indétermination qui pourra être résolu en la recombinaison avec l'intégrale I_2 .

G.2.2 Calcul de la seconde intégrale I_2

L'intégrale I_2 (cf. Equ. G.23) s'interprète comme la transformée de Fourier de la fonction $f(\chi'_z)$ définie par:

$$f(\chi'_z) = a_s \frac{1}{\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi'^2_z - k^2} \quad (\text{G.30})$$

Les tables donnent:

$$I_2 = \begin{cases} -a_s \pi \frac{\sin(\sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2} |z_0|)}{\sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2}} & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} < k \\ a_s \pi \frac{e^{-\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 - k^2} |z_0|}}{\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 - k^2}} & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} > k \end{cases} \quad (\text{G.31})$$

Dans le cas où $\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} = k$, on recombine les deux intégrales I_1 et I_2 afin de lever l'indétermination:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= a_s \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\pi \frac{\delta(\chi'_z)}{j^2 |\chi'_z|} + \frac{1}{\chi'^2_z} \right] e^{-j \chi'_z z_0} d\chi'_z \\ &= a_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\chi'^2_z} \left[\pi |\chi'_z| \frac{\delta(\chi'_z)}{j^2} + 1 \right] e^{-j \chi'_z z_0} d\chi'_z \end{aligned} \quad (\text{G.32})$$

Attendu que:

$$|\chi'_z| \delta(\chi'_z) = 0 \quad (\text{G.33})$$

le premier terme de l'intégrand disparaît:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= a_s \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j \chi'_z z_0}}{\chi'^2_z} d\chi'_z \\ &= \pi |z_0| \end{aligned} \quad (\text{G.34})$$

En ajoutant les résultats des intégrales I_1 et I_2 , on obtient le spectre spatial G_{2D} cherché:

$$G_{2D}(\chi_x, \chi_y) = \begin{cases} \pi \frac{e^{-j \sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2} |z_0|}}{\sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2}} & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} < k \\ \pi |z_0| & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} = k \\ \pi \frac{e^{-\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 - k^2} |z_0|}}{\sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2 - k^2}} & \text{si } \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2} > k \end{cases} \quad (\text{G.35})$$

Références Bibliographiques

- BRUNEAU M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans.
- JOHNSON D.H. & DUDGEON D.E. (1993). *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*. Prentice Hall.
- REINHARD H. (1989). *Cours de Mathématiques du signal*. Dunod Université, Paris.

Annexe H

Approximation de Fresnel

Sommaire

H.1 Principe	445
H.2 Application à l'intégrale de Rayleigh I	445
Références Bibliographiques	447

H.1 Principe

L'approximation de Fresnel peut être utilisée pour évaluer les intégrales de la forme:

$$I = \int_a^{+\infty} f(\rho) e^{j\phi(\rho)} d\rho \quad (\text{H.1})$$

Elle est basée sur un développement limité à l'ordre 2 du terme de phase $\phi(\rho)$ au voisinage de la borne inférieure de l'intégrale $\rho = a$ [Start, 1997]:

$$\phi(\rho) \simeq \phi(a) + (\rho - a) \phi'(a) + \frac{1}{2} \phi''(a) \quad (\text{H.2})$$

qui peut encore s'écrire:

$$\phi(\rho) \simeq \phi(a) + \mu_a (\gamma^2 - \gamma_a^2) \quad (\text{H.3})$$

avec:

$$\begin{cases} \gamma &= \sqrt{\frac{|\phi''(a)|}{2}} \left[\rho - a + \frac{\phi'(a)}{\phi''(a)} \right] \\ \gamma_a &= \gamma|_{\rho=a} = \mu_a \frac{\phi'(a)}{\sqrt{2|\phi''(a)|}} \\ \mu_a &= \text{signe}[\phi''(a)] \end{cases}$$

En remplaçant $\phi(\rho)$ par ce développement limité et en admettant pour le terme d'amplitude que:

$$f(\rho) \simeq f(a) \quad (\text{H.4})$$

l'intégrale I devient:

$$I \simeq f(a) e^{j\phi(a)} e^{-j\mu_a\gamma_a^2} \int_a^{+\infty} e^{-j\mu_a\gamma^2} d\rho \quad (\text{H.5})$$

L'intégrale restante s'exprime alors en fonction des intégrales de Fresnel qui sont définies par [Bruneau, 1983]:

$$\mathcal{C}(v) = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du \quad (\text{H.6})$$

$$\mathcal{S}(v) = \int_0^v \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du \quad (\text{H.7})$$

Ainsi:

$$\int_a^{+\infty} e^{-j\mu_a\gamma^2} d\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi|\phi''(a)|}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mathcal{C}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma_a\right) \right] + j\mu_a \left[\frac{1}{2} - \mathcal{S}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma_a\right) \right] \right\} \quad (\text{H.8})$$

Il vient finalement:

$$I \simeq f(a) e^{j\phi(a)} e^{-j\mu_a\gamma_a^2} \frac{1}{\sqrt{\pi|\phi''(a)|}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mathcal{C}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma_a\right) \right] + j\mu_a \left[\frac{1}{2} - \mathcal{S}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma_a\right) \right] \right\} \quad (\text{H.9})$$

H.2 Application à l'intégrale de Rayleigh I

Dans le cadre de l'intégrale de Rayleigh I, on veut évaluer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{\rho_C}^{+\infty} \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{n}}{R} \Big|_0 (1 + jkR_0) \frac{1}{4\pi R_0^2} \frac{1}{2\pi R} e^{-jk(R+R_0)} d\rho \quad (\text{H.10})$$

Les fonctions $f(\rho)$ et $\phi(\rho)$ sont alors données par:

$$f(\rho) = \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{n}}{R_0} (1 + jkR_0) \frac{1}{4\pi R_0^2} \frac{1}{2\pi R} \quad (\text{H.11})$$

$$\phi(\rho) = -k(R + R_0) \quad (\text{H.12})$$

avec:

$$\begin{cases} R_0 &= |\vec{R}_0| &= \sqrt{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 + (z_0 - z_s)^2} \\ R &= |\vec{R}| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \end{cases}$$

Les vecteurs \vec{r}_s , \vec{r}_0 et \vec{r} repèrent respectivement la position de la source primaire, d'une source secondaire et d'un récepteur. La variable ρ est définie par:

$$\rho = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)} \quad (\text{H.13})$$

On exprime les dérivées première et seconde du terme de phase $\phi(\rho)$:

$$\frac{d\phi}{d\rho} = -\frac{k}{\rho} \left[x_0 \left(\frac{x_0 - x_s}{R_0} + \frac{x_0 - x}{R} \right) + z_0 \left(\frac{z_0 - z_s}{R_0} + \frac{z_0 - z}{R} \right) \right] \quad (\text{H.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{d\rho^2} &= -\frac{k}{\rho^2} \left\{ x_0^2 \left[\frac{(y_0 - y_s)^2 + (z_0 - z_s)^2}{R_0^3} + \frac{(y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}{R^3} \right] \right. \\ &\quad + z_0^2 \left[\frac{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2}{R_0^3} + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{R^3} \right] \\ &\quad \left. + 2x_0y_0 \left[\frac{(x_0 - x_s)(z_0 - z_s)}{R_0^3} + \frac{(x_0 - x)(z_0 - z)}{R^3} \right] \right\} \quad (\text{H.15}) \end{aligned}$$

L'approximation de Fresnel donne donc pour l'intégrale définie par l'équation H.10:

$$I \simeq f(\rho_C) e^{j\phi(\rho_C)} e^{-j\mu_C \gamma_C^2} \frac{1}{\sqrt{\pi|\phi''(\rho_C)|}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mathcal{C}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma_C\right) \right] + j\mu_C \left[\frac{1}{2} - \mathcal{S}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma_C\right) \right] \right\} \quad (\text{H.16})$$

avec:

$$\begin{cases} \gamma_C &= \gamma|_{\rho=\rho_C} = \mu_C \frac{\phi'(\rho_C)}{\sqrt{2|\phi''(\rho_C)|}} \\ \mu_a &= \text{signe}[\phi''(\rho_C)] \end{cases}$$

Les dérivées première et seconde du terme de phase $\phi(\rho)$ sont définis par les équations H.14 & H.15.

Références Bibliographiques

BRUNEAU M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, Le Mans.

START E. (1997). *Direct Sound Enhancement by Wave Field Synthesis*. Ph.D. Thesis, Faculty of Applied Physics, Delft, Pays-Bas.

Annexe I

Publications

Sommaire

I.1	CORESA 98 (Lannion, 9 & 10 juin 1998)	451
I.2	ICA (Seattle, 20-26 juin 1998)	461
I.3	DAFX 98 (Barcelone, 19-21 novembre 1998)	469
I.4	Forum Acusticum 99 (Berlin, 14-19 mars 1999)	475
I.5	AES 16th International Conference on Spatial Sound Reproduction (Rovaniemi, 10-12 avril 1999)	481

I.1 CORESA 98 (Lannion, 9 & 10 juin 1998)

I.2 ICA (Seattle, 20-26 juin 1998)

I.3 DAFX 98 (Barcelone, 19-21 novembre 1998)

I.4 Forum Acusticum 99 (Berlin, 14-19 mars 1999)

I.5 AES 16th International Conference on Spatial Sound Reproduction (Rovaniemi, 10-12 avril 1999)

